

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

GRADO EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA TÉRMICA Y DE FLUIDOS



TRABAJO FIN DE GRADO:

**ESTUDIO NUMÉRICO DEL COMPORTAMIENTO DE UNA
MICROBURBUJA BAJO UNA ONDA DE PRESIÓN ACÚSTICA**

**AUTOR: BORJA HERRANZ MORAL
TUTORA: ANA MEDINA PALOMO
TUTORA: ELENA IGUALADA VILLODRE**

ÍNDICE

NOMENCLATURA.....	Pág.10
RESUMEN.....	Pág.13
CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN.....	Pág.15
1.1 MOTIVACIÓN.....	Pág.15
1.2 ESTADO DEL ARTE.....	Pág.16
1.3 OBJETO DE ESTUDIO: BURBUJA MONODISPERSA SOMETIDA A UN CAMPO DE PRESIÓN ACÚSTICO DE BAJA AMPLITUD.....	Pág.20
CAPÍTULO 2: FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	Pág.27
2.1 ECUACIONES DE RAYLEIGH-PLESSET.....	Pág. 28
2.2 ECUACIÓN DE KELLER MIKSIS PARA LA OSCILACIÓN RADIAL.....	Pág.32
2.3 ECUACIONES DE KELLER MIKSIS CON EFECTOS TÉRMICOS.....	Pág.34
2.4 RÉGIMEN LINEAR.....	Pág.38
2.5 OTROS MODELOS DE ESTUDIO.....	Pág.40
2.5.1 MODELO DE GILMORE.....	Pág.40
2.5.2 MODELO HERRING-TRILLING.....	Pág.40
2.6 ANÁLISIS DE RESONANCIA UTILIZANDO CHIRPS.....	Pág.41
2.7 SIMULACIONES PARA UN OSCILADOR ARMÓNICO MEDIANTE UN CHIRP.....	Pág.42
2.8 RESOLUCION MEDIANTE FORTRAN Y MATLAB: MÓDULOS UTILIZADOS.....	Pág.45
2.8.1MATLAB.....	Pág.44
2.8.2FORTRAN.....	Pág.46
2.8.3 KELLER-MIKSIS.....	Pág.47
2.8.4 ECUACIÓN LINEALIZADA.....	Pág.50

CAPÍTULO 3: RESULTADOS NUMÉRICOS.....	Pág.53
3.1 ANÁLISIS DE LA BURBUJA DE 2 MICRAS.....	Pág.53
3.2 ANÁLISIS BURBUJAS DE TAMAÑOS MAYORES.....	Pág.62
3.3 ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LA BURBUJA ANTE DISTINTOS AMBIENTE.....	Pág.77
CAPÍTULO 4: ANÁLISIS ECONÓMICO DEL PROBLEMA.....	Pág.83
4.1 SOFTWARE INFORMÁTICO.....	Pág.83
4.2 HARDWARE INFORMÁTICO.....	Pág.84
4.3 COSTE PERSONAL.....	Pág.84
4.4 COSTE TOTAL DEL PROYECTO.....	Pág.85
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y PROYECTOS FUTUROS.....	Pág.87
BIBLIOGRAFÍA.....	Pág.89

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1.1: Ecografía del cuerpo humano.....</i>	<i>Pág.18</i>
<i>Figura 1.2: Coágulo formado en el cuello de un paciente.....</i>	<i>Pág.18</i>
<i>Figura 1.3: Representación de la sonoluminiscencia.....</i>	<i>Pág.20</i>
<i>Figura 1.4: Definición gráfica de las presiones que actúan en la burbuja.....</i>	<i>Pág.21</i>
<i>Figura 2.1: Evolución del chirp a lo largo del tiempo.....</i>	<i>Pág.44</i>
<i>Figura 2.2: Espectro del chirp.....</i>	<i>Pág.44</i>
<i>Figura 2.3: Evolución de la presión en la burbuja de 8 micras.....</i>	<i>Pág.45</i>
<i>Figura 2.4 Evolución radial de la burbuja con respecto al tiempo (Keller-Miksis).....</i>	<i>Pág.49</i>
<i>Figura 2.5 Evolución temporal de la presión de la burbuja.....</i>	<i>Pág.49</i>
<i>Figura 2.6 Espectro de presiones para la burbuja estudiada.....</i>	<i>Pág.50</i>
<i>Figura 2.7: Evolución radial de la burbuja con respecto al tiempo (linealizada).....</i>	<i>Pág.51</i>
<i>Figura 3.1: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis).....</i>	<i>Pág.54</i>
<i>Figura 3.2: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (linealizada).....</i>	<i>Pág.54</i>
<i>Figura 3.3: Evolución de la presión con respecto al tiempo.....</i>	<i>Pág.55</i>
<i>Figura 3.4: Espectro de la presión de la burbuja de 2 micras.....</i>	<i>Pág.56</i>
<i>Figura 3.5: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis).....</i>	<i>Pág.57</i>
<i>Figura 3.6: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (linealizada).....</i>	<i>Pág.57</i>
<i>Figura 3.7: Evolución de la presión con respecto al tiempo.....</i>	<i>Pág.58</i>
<i>Figura 3.8: Espectro de la presión.....</i>	<i>Pág.59</i>
<i>Figura 3.9: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (Keller-</i>	

<i>Miksis).</i>	Pág.60
<i>Figura 3.10: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (linealizada).</i>	Pág.60
<i>Figura 3.11: Evolución de la presión con respecto al tiempo.</i>	Pág.61
<i>Figura 3.12: Espectro de la presión.</i>	Pág.62
<i>Figura 3.13: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis).</i>	Pág.63
<i>Figura 3.14: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (linealizada).</i>	Pág.64
<i>Figura 3.15: Evolución de la presión con respecto al tiempo.</i>	Pág.64
<i>Figura 3.16: Espectro de la presión.</i>	Pág.65
<i>Figura 3.17: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis).</i>	Pág.65
<i>Figura 3.18: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (linealizada).</i>	Pág.66
<i>Figura 3.19: Evolución de la presión con respecto al tiempo.</i>	Pág.66
<i>Figura 3.20: Espectro de la presión.</i>	Pág. 67
<i>Figura 3.21: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis).</i>	Pág.67
<i>Figura 3.22: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (linealizada).</i>	Pág.68
<i>Figura 3.23: Evolución de la presión con respecto al tiempo.</i>	Pág.68
<i>Figura 3.24: Espectro de la presión.</i>	Pág.69
<i>Figura 3.25: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis).</i>	Pág. 70
<i>Figura 3.26: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (linealizada).</i>	Pág.71
<i>Figura 3.27: Evolución de la presión con respecto al tiempo.</i>	Pág.71
<i>Figura 3.28: Espectro de la presión.</i>	Pág. 72

<i>Figura 3.29: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis).....</i>	<i>Pág.72</i>
<i>Figura 3.30: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (linealizada).....</i>	<i>Pág.73</i>
<i>Figura 3.31: Evolución de la presión con respecto al tiempo.....</i>	<i>Pág.73</i>
<i>Figura 3.32: Espectro de la presión.....</i>	<i>Pág.74</i>
<i>Figura 3.33: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis).....</i>	<i>Pág.74</i>
<i>Figura 3.34: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (linealizada).....</i>	<i>Pág.75</i>
<i>Figura 3.35: Evolución de la presión con respecto al tiempo.....</i>	<i>Pág.75</i>
<i>Figura 3.36: Espectro de la presión.....</i>	<i>Pág.76</i>
<i>Figura 3.37: Evolución de la burbuja en un ambiente de $p_0 = 70$ mm Hg.....</i>	<i>Pág.77</i>
<i>Figura 3.38: Evolución de la presión aplicada en un ambiente $p_0 = 70$ mm Hg.....</i>	<i>Pág.78</i>
<i>Figura 3.39: Evolución de la burbuja en un ambiente de $p_0 = 90$ mm Hg.....</i>	<i>Pág.78</i>
<i>Figura 3.40: Evolución de la presión aplicada en un ambiente $p_0 = 90$ mm Hg.....</i>	<i>Pág.79</i>
<i>Figura 3.41: Evolución de la burbuja en un ambiente de $p_0 = 120$ mm Hg.....</i>	<i>Pág.79</i>
<i>Figura 3.42: Evolución de la presión aplicada en un ambiente $p_0 = 120$ mm Hg.....</i>	<i>Pág.80</i>
<i>Figura 3.43: Evolución de la burbuja en un ambiente de $p_0 = 140$ mm Hg.....</i>	<i>Pág.80</i>
<i>Figura 3.44: Evolución de la presión aplicada en un ambiente $p_0 = 140$ mm Hg.....</i>	<i>Pág.81</i>
<i>Figura 3.45: Espectro de las presiones ambientes utilizadas.....</i>	<i>Pág.81</i>

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer a mis compañeros de fatigas y penas, y a los que considero ya amigos, por la cantidad de horas que hemos pasado en esta carrera juntos. En especial, me gustaría agradecer a mis compañeros Julián Brouté, Jairo Peinado, Eduardo Trujillo, Jesús Naranjo y Enrique Miranda por animarme a luchar día a día y por estar ahí en todo momento.

A mis tutoras, Ana Medina y Elena Igualada, por brindarme la oportunidad de realizar este trabajo de investigación y ofrecerme su tiempo cuando he tenido alguna duda durante la realización del proyecto.

A mi familia, en especial a mis padres y a mi hermana, por estar ahí para lo bueno y lo malo, y por ser mi punto de apoyo a lo largo de esta carrera y a lo largo de mi vida.

Muchas gracias por todo.

NOMENCLATURA

$p_i \equiv$ presión interna de la burbuja ($10^5 Pa$)

$p_g \equiv$ presión del gas del interior de la burbuja para un instante de tiempo t

$p_{g_0} \equiv$ presión del gas del interior de la burbuja para el instante inicial.

$p_v \equiv$ presión de vapor del interior de la burbuja ($\sim 0 Pa$)

$p_\sigma \equiv$ tensión superficial de la burbuja

$p(t) \equiv$ presión de la onda acústica sobre la burbuja, variable con el tiempo

$p_\infty \equiv$ presión en el medio exterior de la burbuja

$p_0 \equiv$ presión hidrostática del medio exterior a la burbuja ($\sim 10^5 Pa$)

$p_L \equiv$ presión del agua sobre la pared de la burbuja en un instante de tiempo t cualquiera

$\rho \equiv$ densidad del líquido exterior ($1000 kg/m^3$)

$\rho_g \equiv$ densidad del gas del interior de la burbuja

$m_g \equiv$ masa del gas del interior de la burbuja (kg)

$H \equiv$ diferencia de presiones entre p_L y p_∞

$R_0 \equiv$ radio de la burbuja en el instante inicial ($\sim 1 - 20 \mu m$)

$R \equiv$ radio de la burbuja (variable con el tiempo)

$u_r \equiv$ velocidad radial de la burbuja

$\sigma \equiv$ tensión superficial del agua ($0.072 N/m$)

$F_0 \equiv$ fuerza externa pulsante

$\varepsilon \equiv$ desplazamiento de la burbuja en el medio líquido

$\gamma \equiv$ exponente politrópico del gas que contiene la burbuja (~ 1.4)

$\lambda \equiv$ conductividad térmica de la burbuja

$L_{TH} \equiv$ longitud de penetración térmica en la burbuja

$\chi \equiv$ difusividad térmica de la burbuja

$\Omega_0 \equiv$ frecuencia a la que oscilaría la burbuja si no estuviera amortiguada.

$\beta \equiv$ factor de amortiguamiento de las oscilaciones ($\sim 0.1 - 1$)

$f \equiv$ frecuencia de insonación ($\sim MHz$)

$f_c \equiv$ frecuencia central de la onda

$f_{res} \equiv$ frecuencia de resonancia de la burbuja

$\omega \equiv$ frecuencia angular de insonación $\omega = 2\pi f$

$\mu \equiv$ viscosidad dinámica de la burbuja ($\sim 10^{-3} \frac{kg}{m.s}$)

$R_g \equiv$ constante de los gases ideales ($287 \frac{J}{kg.K}$)

$P_A \equiv$ amplitud de la onda acústica ($\sim 10^3 - 10^4 Pa$)

$c \equiv$ velocidad del sonido en el agua ($1540 m/s$)

$T \equiv$ Temperatura en el interior de la burbuja ($298 K$)

$k \equiv$ factor de *chirp*

$BW \equiv$ ancho de banda de la señal ($\sim MHz$)

RESUMEN

En el presente Trabajo de Fin de Grado se estudia el comportamiento de una microburbuja en el interior de un líquido, la cual está sometida a la acción de un campo acústico variable con el tiempo. Nuestro objetivo está enfocado a conocer el comportamiento de dicha microburbuja bajo el efecto de un campo acústico externo. Este será el preámbulo para el estudio de sus diversas aplicaciones tanto en el ámbito biomédico, (utilizado como agentes de contraste para la obtención de imágenes mediante ultrasonidos), como en ámbito industrial (industria petroquímica o nuclear).

Para la realización del proyecto se desarrollan las ecuaciones de Rayleigh-Plesset y Keller-Miksis, que explican las variaciones de volumen de la microburbuja bajo la excitación acústica, así como modelos lineales de la oscilación radial de la burbuja que simplifiquen los cálculos en los distintos programas informáticos a utilizar.

Posteriormente se analiza la resolución numérica del problema para cada uno de los modelos estudiados mediante distintos programas informáticos y se muestran los resultados para los casos resueltos, para los cuales hemos empleado una excitación en forma de *chirp*.

Además de esto, en el caso del modelo de Keller-Miksis, se estudia la linealización del problema para el caso de señales acústicas de baja amplitud, y se compara la solución analítica de la ecuación lineal con los resultados correspondientes al modelo completo.

Finalmente se presupuesta el proyecto, de forma que podamos cuantificar el coste relacionado a la realización del proyecto y se exponen las conclusiones del estudio realizado, así como las líneas futuras de investigación que podrían surgir a partir de este proyecto.

ABSTRACT

In this Final Degree Project the behavior of a microbubble within a liquid is studied, which is subjected to the action of an acoustic field varying with time. Our aim is focused on understanding the behavior of the microbubble under the effect of an acoustic external field. This one will be the prelude for the study of its diverse applications both in the biomedical field, (used as contrast agents for ultrasound imaging), as in industrial applications (petrochemical industry or nuclear industry).

For the accomplishment of the project the equations of Rayleigh-Plesset and Keller-Miksis are used. They explain the variations of volume of the microbubble under the acoustic excitation, as well as linear models of the radial oscillation of the microbubble to simplify the calculations in the various software to use.

Then the numerical resolution of the problem for each of the models is analyzed by various software and the results for the resolved cases are shown, for which we have used an excitation in the shape of a *chirp*.

Besides this, in the case of the model of Keller-Miksis, the linearization of the problem for the case of acoustic signs of low amplitude is studied, and the analytical solution of the linear equation with the results corresponding to the complete model is compared.

Finally the project is presupposed, so we could quantify the cost related to the accomplishment of the project and the conclusions of the study and the conclusions of the study are exposed, as well as the future lines of research that might arise from this project.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

En este apartado introductorio se van a mostrar tanto las motivaciones del proyecto como el estado del arte. Asimismo, se presentará el objeto de estudio.

1.1 Motivación del proyecto

Una burbuja, tal y como lo define la Real Academia Española, es "un glóbulo de aire u otro gas que se forma en el interior de algún líquido y sale a la superficie". Si se profundiza en esta definición, se puede interpretar una burbuja como todo volumen de aire o gas, la cuál ha sido formada en el entorno de un medio líquido. En el caso de estudio que nos atañe, se considerará que la burbuja presenta una forma esférica gracias a la tensión superficial y que asimismo se mueve a través del líquido que la rodea debido a la inercia de éste

El estudio de las burbujas no se restringe al ámbito puramente natural, sino que durante los últimos años ha cobrado fuerza su estudio en relación con procesos de carácter tecnológico. Muchos estudiosos, como Apfel o Flynn entre otros, han dedicado sus trabajos de investigación a la búsqueda del fenómeno del origen de las burbujas y de su comportamiento [3], coincidiendo todo en que, para la existencia de dichas burbujas, además de un volumen de vapor o gas que se encuentre en un medio líquido (o núcleos según menciona Flynn), es necesario que apareciera una presión acústica que genere dicha cavitación.

En muchos procesos de carácter tecnológico aparecen poblaciones de burbujas, pero además de ello, en los últimos años las burbujas se están utilizando para diversas aplicaciones. Se pueden mencionar algunos campos científicos en los que se aplican, como son los campos de la biomedicina, la tecnología marina o en la física nuclear, mediante la sonoluminiscencia. Entre las diversas aplicaciones en las que se utilizan, se realiza una mención especial a la aplicación de las microburbujas como agentes de contraste. Mediante el uso de burbujas, cuyo radio es del orden de magnitud del micrómetro (o incluso del nanómetro), rodeadas por un material (que puede ser un lípido o un polímero) que actuará como capa para que la burbuja no se disuelva en la sangre, se diagnosticarán diferentes problemas en el cuerpo humano (por ejemplo, para realizar una ecocardiografía). Asimismo se realiza una mención especial a la utilización de las microburbujas como medidores de presión del medio en el que se encuentran, de forma que se pueden utilizar como medidores de presión de la sangre (gracias a su alta compresibilidad) o como medidores de presión en la industria petroquímica, de forma que seamos capaces de detectar cualquier posible dificultad durante el transporte del

crudo.

Debido a todos los procesos en los que aparecen y a las aplicaciones en las que se están utilizando, nos interesa conocer el comportamiento de las burbujas. Para simplificar el problema, en este estudio consideraremos una burbuja monodispersa. Este será el punto de partida de nuestro proyecto, y el paso previo para la descripción del comportamiento de estructuras más complejas.

La elección de este tema responde principalmente al interés que ha suscitado el tema tanto desde el punto de vista biomédico, como industrial. La búsqueda de nuevas aplicaciones o la mejora de las mismas ha supuesto una motivación extra. Asimismo, la amplia cantidad de información y su facilidad de acceso han sido determinantes para la realización del proyecto.

1.2 ESTADO DEL ARTE

El estudio de las microburbujas y la generación de la cavitación mediante ondas acústicas, es un fenómeno que ha cobrado una gran importancia en los últimos 50 años. Desde que Lord Rayleigh estudiara el fenómeno de la cavitación que se generaba en las hélices de los propulsores de la armada, cuando trabajó para la Navy Seals [4], muchas han sido las teorías que se han desarrollado sobre esta tecnología.

Hasta este momento, se ha desarrollado el estudio del comportamiento de la burbuja ante la aplicación de un campo acústico. En este capítulo, se hará mención a la evolución que ha experimentado esta tecnología en el ámbito científico y como ha repercutido en la sociedad. Los siguientes ejemplos de aplicación son de interés personal, y representan algunas de las aplicaciones que actualmente se están aplicando de forma efectiva en el ámbito industrial.

Aplicación en el ámbito biomédico

La biomedicina es una ciencia que está cobrando una gran importancia en los últimos años. Esta ciencia engloba el estudio de las ciencias de medicina, odontología y veterinaria, así como ciencias referidas a la biología, como la química, la genética, o la anatomía. Se enfoca en la investigación de los procesos e interacciones que afectan al organismo humano, para el desarrollo de nuevos fármacos y las técnicas necesarias para permitir el tratamiento de diversas enfermedades.

Existen diversas líneas de investigación que se dedican al estudio de diagnósticos ultrasónicos y la generación de cavitación en pacientes: Para ello se usan pequeñas microburbujas llamadas agentes de contraste (en inglés UCA's). Estas burbujas tienen

un rango de radios comprendidos entre 0.5 y 3 μm [6].

Las burbujas están rodeadas de una capa de fosfolípidos u otro material (polímeros o albuminas) para que sean más estables y no se disuelvan rápidamente. El gas de su interior es soluble en el torrente sanguíneo y es inocuo. Sin embargo, un gran problema de la utilización de este recubrimiento es que se han dado casos aislados de alergias a las microburbujas.

Se ha utilizado la generación de ondas ultrasónicas de gran intensidad para poder curar tumores en pequeños roedores, alcanzando ratios de curación del 29.4 % Esta tecnología no ha estado, sin embargo, exenta de polémica en el ámbito clínico [1]: Así como a principios del siglo XX, el diagnóstico por rayos X fuera criticado por sus posibles consecuencias en la salud humana (posible leucemia en niños), el diagnóstico por ultrasonidos tendría unas consecuencias similares, sobre todo en su aplicación a madres embarazadas, tal y como expuso Mr. John Pattern. Sin embargo, otros estudiosos de la materia, como Zilskin en 1987, refutaron dichas teorías, exponiendo que el análisis clínico por ultrasonidos era uno de los métodos más eficaces y más seguros para hallar diferentes enfermedades en pacientes.

Aunque el empleo de esta tecnología pueda parecer de gran utilidad, lleva consigo una serie de dificultades que puede perjudicar el tratamiento en pacientes. En primer lugar, al utilizar pulsos de grandes amplitudes y durante un tiempo prolongado, genera un incremento de la temperatura en los pacientes que perjudican claramente su salud. Para evitar dicho fenómeno, se deben utilizar longitudes de onda de baja intensidad y tiempos de pulsos más cortos. Con tiempos de pulso del orden del milisegundo, se ha conseguido acelerar la reparación de tejidos humanos, reducir el dolor en pacientes y tratar pequeños tumores. En este caso, los incrementos de temperatura en el paciente ascienden a 1 K cada 5 minutos, lo que disminuye considerablemente el riesgo en los pacientes.

Sin embargo, a estas longitudes de onda y tiempos de exposición a ultrasonidos, se pueden provocar daños graves en el útero de las madres y pueden llevar a la muerte del embrión. Si la longitud del pulso es del orden del microsegundo, se puede producir hipertermia y cavitación, pero depende de las condiciones del medio que rodea a la microburbuja [1].

Actualmente, esta tecnología se está utilizando en los siguientes campos:

- Ecocardiografía y ecografías: Se utilizan ondas sonoras para obtener imágenes del corazón, de un embrión en embarazadas o para detectar tumores en los pacientes. Para mejorar la calidad de la imagen se emplean microburbujas de radios comprendidos entre el nanómetro y el micrómetro y se utilizan lípidos como capa protectora de la burbuja. El principio activo es utilizar las microburbujas como medio para transmitir la onda ultrasónica, gracias a la gran

e trombosis: Mediante radiación de pequeña

-
- Scanning electron micrograph (SEM) of a cross-section of a polymer film. The image shows a textured surface with a central region of dark, irregular material. A scale bar at the bottom right indicates 20 μm .

ores de presión: La presión de la sangre es uno de l

-
- [18]

infartos en el corazón) o de hipotensión [13].

La utilización de microburbujas es una de las tecnologías que se pueden aplicar para medir la presión arterial. Gracias a la alta compresibilidad de la burbuja sería posible utilizarlas como un manómetro, sin perjudicar la salud del paciente.

Estas microburbujas, cuyo tamaño es menor que los glóbulos rojos, pero lo suficiente grandes para no difundirse entre ellos, se utilizan como un medio de contraste para crear imágenes que reflejen la presión en el torrente sanguíneo, similarmente a las ecocardiografías.

Sonoluminiscencia

La sonoluminiscencia es un fenómeno físico que consiste en la emisión de luz en líquidos a partir de ondas sonoras. Durante este fenómeno, aparecen pequeñas cavidades que se expanden y colapsan rápidamente, de forma que en ese colapso, se generan unos pulsos de luz de gran intensidad y corta duración. Las temperaturas alcanzadas debidas a este fenómeno se sitúan en 30000 K.

Este fenómeno ha despertado gran interés en la comunidad científica y se ha empezado a investigar en esta dirección. Uno de los campos en los que mayor interés ha cobrado este hecho, ha sido el de la física nuclear, concretamente el referente a la fusión fría. Diversos estudios, como el realizado por Taleryarkhan [11], expresaban que utilizando acetona deuterada se producía tritio y neutrones en cantidades adecuadas con la fusión. Sin embargo, nunca se llegó a demostrar esta teoría.

Otros estudios, como el realizado por el Instituto Politécnico de Rensselaer en colaboración con la Universidad de Purdue, el Oak Ridge National Laboratory y la Academia Rusa de Ciencias, afirman haber conseguido fusión fría utilizando esta técnica. Las temperaturas conseguidas eran cercanas a los 100 millones de grados kelvin.

Muchas son las incógnitas que rodean este fenómeno físico, ya que en la actualidad las pruebas científicas que demuestran la posibilidad de utilizar esta tecnología para la fusión nuclear son escasas y de veracidad dudosa. Si se consiguiera un análisis más exhaustivo de esta teoría, se podrían alcanzar grandes resultados en el ámbito nuclear, y podría ser una solución al gran problema energético mundial.



Figura 1.3: Representación de la sonoluminiscencia

Detección de burbujas en la industria

La detección de burbujas para la industria ha sido siempre un hecho importante para el avance y diseño de nuevas aplicaciones que mejoren diversos procesos. Existen numerosos ejemplos donde la detección de microburbujas tiene un carácter fundamental:

- En la industria química y farmacéutica, se pueden producir pequeñas burbujas (pinturas, comida, detergentes), que producen la degradación del producto.
- En la industria petroquímica, se pueden formar pequeños núcleos de gas en el crudo, lo cual indica grandes presiones en él. Es necesario su estudio para optimizar el transporte del petróleo.
- Cavitación en componentes hidráulicos, que provocan su erosión y provocan daños fatales en dichos componentes.
- Aparición durante la aplicación de técnicas por efecto Doppler. Producen diversos armónicos indeseados que dificultan las pruebas en las que se aplica dicho efecto.

Todos estos fenómenos son indeseados y su conocimiento y posterior corrección son necesarios para mejorar los procesos industriales anteriormente citados.

1.3 OBJETO DE ESTUDIO: BURBUJA MONODISPERSA SOMETIDA A UN CAMPO DE PRESIÓN ACÚSTICO DE BAJA AMPLITUD

El objeto de estudio en este proyecto será una burbuja monodispersa, la cual se compone de un gas (que puede ser vapor de agua y/o un gas) y que se encontrará rodeada en todo momento en un medio líquido. Adicionalmente se considerará que la burbuja es completamente esférica, gracias a la tensión superficial.

Para poder formular el modelo, deberemos describir el comportamiento de la burbuja como una aproximación a un oscilador armónico, en el que la burbuja, excitada

mecánicamente por una fuente externa (en el caso de estudio, se excitará mediante una presión acústica), oscilará en el entorno del líquido. El radio de la burbuja $R(t)$ oscilará en torno al valor de equilibrio, gracias a la elasticidad del gas que contiene. Por otra parte, la inercia del líquido es la que permitirá el movimiento de la burbuja a través de él.

Los parámetros básicos de los que dependerá nuestro problema serán los siguientes:

- El radio inicial R_0 .
- La presión hidrostática del medio p_0 .
- La presión del líquido sobre la superficie de la burbuja en cualquier instante $p_L(t)$.
- La presión debido a la tensión superficial en la pared de la burbuja p_σ .
- La presión en el interior de la burbuja p_i .
- La presión del gas en el interior de la burbuja p_g .
- La presión del vapor en el interior de la burbuja p_v .
- La presión del medio exterior a la burbuja p_∞ .
- La presión de la onda acústica, variable con el tiempo $p(t)$.
- La densidad del líquido ρ .

Teniendo en cuenta los parámetros anteriormente descritos, podríamos definir la presión en el interior de la burbuja como:

$$(1) \quad p_i = p_g + p_v$$

Esta formulación se puede expresar de forma gráfica como sigue:

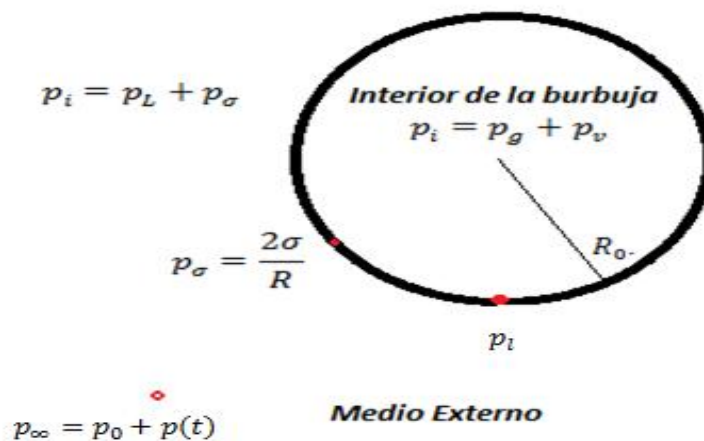


Figura 1.4: Definición gráfica de las presiones que actúan en la burbuja

En este dibujo, se han indicado las presiones que actúan a ambos lados de la superficie de la burbuja. Por equilibrio de fuerzas, la presión a ambos lados debe ser la misma. Es por ello, que se puede definir la presión en el interior como:

$$(2) \quad p_i = p_L + p_\sigma$$

que en el instante inicial, (2) se expresará como:

$$(3) \quad p_{i_0} = p_0 + p_{\sigma_0}$$

Nótese que para el instante inicial $t = 0$, $p_{L_0} = p_0$, ya que no tenemos excitación externa.

Podemos despejar el valor de la tensión superficial, si dividimos el valor de la fuerza que se generaría si hiciéramos un corte en el contorno de la burbuja, e integrando la ecuación desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$: La solución a la integral, será igual a:

$$(4) \quad \int_0^R dF_x = \int_0^{\pi/2} 2\pi R \sin\theta * p_\sigma \cos\theta * R d\theta$$

$$(5) \quad 2\pi R\sigma = \pi R^2 p_\sigma$$

$$(6) \quad p_\sigma = \frac{2\sigma}{R}$$

De esta manera, y considerando las expresiones (3) y (6) y la definición previa para la presión p_i en (2), podemos definir la siguiente igualdad para el instante inicial $t = 0$, donde $R(t) = R_0$:

$$(7) \quad p_{g_0} = p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - p_v$$

Asimismo, se considerarán condiciones adiabáticas para gas ideal en el interior de la burbuja. La ecuación que describe un proceso adiabático para gas ideal, es:

$$(8) \quad PV^\gamma = cte$$

De esta forma, e igualando al producto que se obtendría para $R(0) = R_0$, podemos comprobar que:

$$(9) \quad p_g R^{3\gamma} = cte$$

donde se ha tomado el volumen de la burbuja como el correspondiente a una esfera y donde gamma es el exponente politrópico, que toma valor $\gamma = 1,4$ para el caso adiabático. Si se utiliza la expresión (9), comparando un valor en un instante cualquiera de tiempo t con el valor de (9) para el instante inicial, podremos despejar el valor de la presión del gas en el interior de la burbuja p_g :

$$(10) \quad p_g R^{3\gamma} = p_{g_0} R_0^{3\gamma}$$

$$(11) \quad p_g = p_{g_0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma}$$

Finalmente, si se aplican todos los resultados obtenidos de (7) y (11) en la ecuación (1), la evolución temporal de la presión en el interior de la burbuja vendrá dada por:

$$(12) \quad p_i(t) = p_{g_0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + p_v = (p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - p_v) * \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + p_v$$

Para un instante diferente de tiempo distinto de cero, la presión ejercida por el líquido sobre la superficie de la burbuja ya no coincide con p_0 , sino que es $p_L(t)$. Despejando $p_L(t)$ de (2), tenemos:

Y sustituyendo p_i por la expresión anterior, tenemos:

$$(13) \quad p_L(t) = (p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - p_v) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + p_v - \frac{2\sigma}{R(t)}$$

Esta ecuación determina el nuevo volumen de la burbuja, después de que la presión del líquido próximo a las paredes de la burbuja haya cambiado uniformemente desde p_0 hasta p_L en un tiempo t . Cualquier pequeña perturbación generada en el nuevo radio generará fuerzas, de forma que la burbuja tenderá a retornar a su radio de equilibrio, produciéndose así una oscilación radial en el tiempo.

Adicionalmente a estas consideraciones, se debe definir la presión en el medio externo a la burbuja. Esta presión irá variando a lo largo del tiempo, debido a la excitación externa, y dependerá tanto de la presión hidrostática del medio p_0 , como de la presión de la onda acústica sobre la burbuja $p(t)$. De esta forma:

$$(14) \quad p_\infty = p_0 + p(t)$$

Para poder dejar planteado el problema, se debe expresar una ecuación que determine la evolución temporal del radio de la burbuja $R(t)$. Para ello, partimos de las ecuaciones de Navier Stokes en coordenadas esféricas:

$$(15) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{Ecuación de continuidad generalizada.}$$

Se supondrá, que la contribución de las coordenadas θ y φ serán nulas, debido a que la burbuja es simétrica y, por tanto, la derivada de estas componentes en la ecuación de continuidad será nula. Por ello, la ecuación de continuidad (15) aplicada al volumen de control de la burbuja, queda como:

$$(16) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 u_r) = 0$$

donde u_r es la componente radial de la velocidad.

Si integramos (16), considerando la densidad del líquido constante, podremos hallar el valor que adquiere la velocidad radial en el entorno de la burbuja:

$$(17) \quad u_r = \frac{C}{r^2}$$

A continuación, y manteniendo la hipótesis de simetría y desarrollo del problema en coordenadas esféricas, se aplica la ecuación de cantidad de movimiento:

$$(18) \quad \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{dp}{dr} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r}) \right)$$

El último término de la ecuación se puede eliminar, tal y como se ha deducido en la ecuación de continuidad. Si a continuación integramos la ecuación (18), considerando que los límites de estudio son $r = R_0$ y $r = \infty$, donde las presiones asociadas son p_L y p_∞ respectivamente, obtenemos las siguientes igualdades:

$$(19) \quad \int_{R(t)}^{\infty} \left(\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) dr = - \int_{p_L(t)}^{p_\infty} \frac{dp}{dr} dr$$

Para poder despejar de la ecuación de cantidad de movimiento, se debe dar un resultado de los valores de la velocidad radial de la burbuja, tanto de la derivada con respecto al tiempo como la derivada con respecto al radio. Para poder estimar dicho resultado, se debe recurrir a los resultados obtenidos en la ecuación de continuidad (17) y derivar su resultado para poder despejar en la ecuación de cantidad de movimiento (19). De esta forma, la derivada de la velocidad radial de la burbuja con respecto al radio se puede expresar como:

$$(20) \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C}{r^2} \right) = -\frac{2C}{r^3}$$

A continuación, se deben aplicar unas determinadas condiciones de contorno para poder resolver la constante C . Se conoce que la velocidad radial en la superficie de la burbuja, debe estar asociada directamente con el ritmo al que cambia el radio de la burbuja. Es decir, $u_r(r = R) = \dot{R}$ (Nótese que se ha introducido la notación de Newton).

Entonces, si se sustituye esta igualdad en la ecuación de continuidad (17), podemos despejar el valor de la constante C como:

$$(21) \quad C = \dot{R} R^2$$

Finalmente, despejando la velocidad radial de la burbuja y derivando su resultado con respecto al radio, utilizando las expresiones (17) y (21) se obtiene que:

$$(22) \quad u_r = \dot{R} \left(\frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$(23) \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = -2 \frac{\dot{R} R^2}{r^3}$$

Por otro lado, derivando con respecto al tiempo la velocidad radial (22), se obtiene que:

$$(24) \quad \frac{\partial u_r}{\partial t} = \ddot{R} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) + 2 \frac{\dot{R}^2 R}{r^2}$$

Consecuentemente, si se sustituyen estas expresiones en la ecuación de cantidad de movimiento, podremos obtener una solución para definir el comportamiento del radio de la burbuja a lo largo del tiempo:

$$(25) \quad \rho \left[\int_{R(t)}^{\infty} \left(\ddot{R} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) + 2 \frac{\dot{R}^2 R}{r^2} \right) dr - \int_{R(t)}^{\infty} \dot{R}^2 \frac{R^4}{r^5} dr \right] = - \int_{p_L(t)}^{p_{\infty}} \frac{dp}{dr} dr$$

Integrando la expresión (25):

$$(26) \quad \frac{\ddot{R} R^2}{R} + 2 \dot{R}^2 \frac{R}{R} - 2 \dot{R}^2 R^4 \frac{1}{4R^4} = \frac{p_L - p_{\infty}}{\rho}$$

Finalmente, la ecuación del comportamiento del radio de la burbuja a lo largo del tiempo, desarrollando la expresión (26), se puede expresar como:

$$(27) \quad \ddot{R} R + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{p_L - p_{\infty}}{\rho}$$

A pesar de que el modelo matemático hallado describe el comportamiento de la burbuja, debemos incluir otros fenómenos de interés en el problema que no se han considerado hasta ahora. Se ha de introducir el término viscoso μ , que hace referencia al efecto de la viscosidad dinámica del líquido, el cual habíamos despreciado hasta el momento. Si introducimos este parámetro y sustituimos los valores hallados anteriormente de la presión del líquido sobre la pared de la burbuja p_L y la presión en el líquido p_{∞} , se obtiene que:

$$(28) \quad \rho \ddot{R} R + \frac{3}{2} \rho \dot{R}^2 = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - p_v \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + p_v - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu \dot{R}}{R} - p_0 - p(t)$$

Esta es la ecuación general del comportamiento de la burbuja que se va a utilizar en este trabajo. Los subsiguientes capítulos tendrán como fin el resolver dicha ecuación para poder determinar la evolución del radio de la burbuja en un medio líquido al aplicarse una cierta onda acústica. Para ello, se aplicarán las ecuaciones de Rayleigh-Plesset y de Keller-Miksis en cada caso. Finalmente se obtendrán unos resultados determinados de

la variación de la presión y del radio de la burbuja a lo largo del tiempo ante dicha onda acústica y se comentarán los resultados obtenidos.

A continuación se desarrollarán dichas ecuaciones, de forma que sirvan como preámbulo para posteriores capítulos:

- Ecuación de Rayleigh-Plesset

$$(29) \quad \ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho}(p_g - P_A \sin(\omega t) - p_0) - \frac{4\mu\dot{R}}{\rho R} - \frac{2\sigma}{\rho R}$$

- Ecuación de Keller-Miksis.

$$(30) \quad \ddot{R}R \left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) \\ = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) \frac{1}{\rho} (p_g - P_A \sin(\omega t) - p_0) + \frac{R}{\rho c} \frac{dp_L}{dt} - \frac{4\mu\dot{R}}{\rho R} - \frac{2\sigma}{\rho R}$$

La principal diferencia entre las dos ecuaciones es que en la ecuación de Keller-Miksis se tiene en cuenta que la densidad del líquido no es constante, sino que varía, dado a que la presión del líquido depende de la velocidad del sonido. En cambio, Rayleigh-Plesset no tiene en cuenta dicho fenómeno. En resumen, se tiene en cuenta los efectos de la radiación acústica. En posteriores capítulos, se desarrollará la resolución numérica del problema utilizando estos dos modelos para describir el comportamiento de la burbuja.

CAPÍTULO 2: FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El comportamiento de una microburbuja, sometido a un campo acústico, será similar al comportamiento de un oscilador armónico simple. En el caso de que la burbuja se comportara como un oscilador libre, esta actuaría como un sistema masa-muelle, en el cual, no existe una fuerza de carácter periódico que provocara las oscilaciones de la burbuja, sino que mediante un impulso inicial, la burbuja oscilaría en función de las distintas propiedades del sistema, como son la frecuencia de resonancia y el amortiguamiento posterior. Sin embargo, en el caso que se va a estudiar, se supondrá que la burbuja oscilará análogamente a un sistema masa-muelle ante una fuerza periódica consistente en un pulso acústico de baja amplitud.

Para la resolución del movimiento de la burbuja, se considerará el sistema como un oscilador no lineal, el cual está excitado mediante una presión acústica. De esta forma, el tamaño de la burbuja y el campo de presiones en el entorno de la misma irán variando a lo largo del tiempo. A todas estas consideraciones, se han de añadir dos fenómenos que actuarán durante dicho movimiento:

- La burbuja está contenida por un gas (vapor y/o otros gases en su interior), de forma que este gas se comportará como un recuperador elástico, e intentará recuperar la forma original de la burbuja.
- La inercia: En el caso del sistema masa-muelle, los efectos de la inercia están dominados por la masa del muelle, siendo la inercia de los alrededores despreciable. Sin embargo, en el caso de la burbuja, al ser la masa de los gases menor que la de los alrededores (recuérdese que el caso de estudio se está desarrollando en un ambiente líquido), la inercia característica es la del líquido que rodea a la burbuja. Esta inercia será la que permita el movimiento del volumen de gas en el entorno del líquido.

Estos dos fenómenos anteriormente descritos se pueden explicar si se aplica la Segunda Ley de Newton al sistema masa-muelle, de forma que se puede expresar de la siguiente manera:

$$(31) \quad m\ddot{\varepsilon} + b\dot{\varepsilon} + k\varepsilon = F_0 e^{i\omega t}$$

Entre los parámetros que aparecen en la ecuación, podemos distinguir la masa de la burbuja m , el radio de la burbuja ε , su velocidad de variación y aceleración en el sistema $\dot{\varepsilon}$ y $\ddot{\varepsilon}$, la constante recuperadora del gas k , y la constante b , que es un número real y positivo. En esta ecuación, además aparece indirectamente el cuadrado de la frecuencia a la que oscilaría la burbuja si no estuviera amortiguada, $\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y un

parámetro $\beta = \frac{b}{2m}$. Todos estos parámetros, tal y como se puede deducir de la visualización de la anterior ecuación, dependen de una fuerza externa pulsante F_0 , que como se explicó anteriormente, está asociada con el campo de presiones generado por la onda acústica.

Si se sustituyen todas estas consideraciones en la ecuación (31), se obtiene la siguiente igualdad:

$$(32) \quad \ddot{\varepsilon} + 2\beta\dot{\varepsilon} + \Omega_0^2\varepsilon = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

Todos estos parámetros aparecerán en la ecuación de Rayleigh-Plesset, la cual será desarrollada con mayor detalle a continuación. En un ciclo, la energía disipada se corresponderá con el producto $b\dot{\varepsilon}^2$, que está relacionada con la velocidad al cuadrado de la oscilación de la burbuja, es decir, la velocidad con la que varía el radio de la burbuja. Por otro lado, debido a la presión acústica, la burbuja oscilará desde su posición de equilibrio R_0 hasta una posición $R(t) = R_0 + R_0\varepsilon(t)$. En este caso, ε hace referencia al radio de la burbuja. Este fenómeno se estudiará a continuación.

Nuestro próximo objetivo, es analizar las ecuaciones que rigen el comportamiento de la burbuja. Se partirá de los resultados obtenidos en el primer capítulo del proyecto y se estudiarán las soluciones obtenidas mediante las ecuaciones de Rayleigh-Plesset y Keller-Miksis para intentar explicar la evolución de nuestro sistema a lo largo del tiempo.

2.1 ECUACIÓN DE RAYLEIGH-PLESSET

En 1917, Lord Rayleigh desarrolló su teoría mientras trabajaba para la Royal Navy. Su estudio se enfocaba en la cavitación que se formaba en las hélices de los propulsores de los barcos de la armada, lo cual perjudicaba al rendimiento y buen uso de dichos dispositivos [1].

La teoría de Rayleigh, que se completaría con el trabajo de Plesset, describía la generación de cavidades en el entorno de un líquido. Dichas cavidades permanecerán esféricas durante todo el estudio, y se considerará que el volumen de gas encerrado permanecerá rodeado de un fluido incompresible (se desprecia el efecto de la velocidad del sonido) [4]. Asimismo, en este modelo, la presión en el interior de la burbuja será menor que la presión ambiente y la presión del líquido se considerará constante mientras la burbuja se contrae desde su radio inicial. La velocidad de la cavidad tenderá a infinito, mientras que el radio de la misma tenderá a cero [3].

En la ecuación de Rayleigh-Plesset, el efecto del colapso de la burbuja ocurre debido a que tiene una fuerte dependencia con la fuerzas de inercia. Se incluye además, que el

cambio de tamaño de la burbuja se produce de forma isoterma. Esta ecuación es no lineal, excepto a bajas amplitudes de onda, que será condición para poder aplicar dicha ecuación linealizada a nuestro problema de estudio [5].

Para la derivación de la ecuación de Rayleigh-Plesset se han de tener en cuenta las siguientes consideraciones [1]:

- Se estudiará una burbuja monodispersa en el entorno de un fluido de longitud infinita.
- La burbuja permanecerá esférica durante la evolución temporal del problema.
- Condiciones uniformes en el interior de la burbuja
- El radio de la burbuja es mucho menor que la longitud de onda generada por el campo acústico $\lambda \gg R$.
- No se consideran fuerzas másicas en el problema.
- Alta densidad del líquido que rodea la burbuja e incompresible.
- Los fenómenos difusivos se consideran despreciables, por lo que la masa del gas en el interior de la burbuja permanece constante.
- La presión de vapor se considera constante.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, la ecuación de Rayleigh-Plesset se puede expresar como:

$$(33) \quad \rho \ddot{R}R + \frac{3}{2} \rho \dot{R}^2 = (p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - p_v) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + p_v - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu \dot{R}}{R} - p_0 - P_A \sin(\omega t)$$

Nótese que se corresponde con la ecuación que hemos deducido en el capítulo anterior, teniendo en cuenta además el efecto de la viscosidad del líquido que rodea a la burbuja y donde la presión acústica viene dada por una onda senoidal de amplitud P_A . A continuación, se adimensionaliza la expresión (33).

Adimensionalización

Para realizar la adimensionalización de la ecuación de Rayleigh-Plesset, se deben definir en primera instancia los parámetros fundamentales de los que dependerá nuestro problema. Si analizamos los parámetros que aparecen en nuestro problema, podemos comprobar que los más importantes son:

- El radio inicial de la burbuja R_0 , el cual define la longitud característica del problema.
- La frecuencia de resonancia ω con la cual estamos insonando nuestra burbuja, que define la escala temporal del problema.

- La densidad del líquido ρ , que recoge el efecto de las características físicas de nuestro fluido, que estamos incluyendo en el problema.

Una vez definidos estos parámetros, debemos desarrollar nuestra ecuación en función de variables adimensionales:

- Si se adimensionaliza la evolución del radio de la burbuja con respecto al radio inicial de la misma, obtenemos que $a = \frac{R}{R_0}$. Esta variable hará referencia al radio de la burbuja en forma adimensional.
- Si se adimensionaliza el tiempo con la escala temporal en la que se producen variaciones en el campo acústico con el que excitamos la burbuja, se obtiene que $\tau = \omega t$. Esta variable hará referencia al tiempo que transcurre desde que la burbuja comienza a oscilar, en forma adimensional.

Finalmente, introduciendo estos términos en la ecuación de Rayleigh-Plesset, se obtiene la siguiente igualdad (Se expresará la resolución en función de la notación de Newton):

$$(34) \quad \rho R_0^2 \omega^2 \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right) = (p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - p_v) a^{-3\gamma} + p_v - \frac{2\sigma}{a R_0} - \frac{4\mu\omega}{a} \dot{a} - p_0 - p(t)$$

Asimismo, si dividimos la ecuación (34), por el producto $\rho R_0^2 \omega^2$, se obtiene que:

$$(35) \quad \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right) = \left(\frac{p_0}{\rho R_0^2 \omega^2} + \frac{2\sigma}{\rho R_0^3 \omega^2} - \frac{p_v}{\rho R_0^2 \omega^2} \right) a^{-3\gamma} + \frac{p_v}{\rho R_0^2 \omega^2} - \frac{2\sigma}{a \rho R_0^2 \omega^2} - \frac{4\mu\omega}{\rho R_0^2 \omega^2} \frac{\dot{a}}{a} - \frac{p_0}{\rho R_0^2 \omega^2} - \frac{p(t)}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

Esta es la ecuación de Rayleigh-Plesset en forma adimensional. Para ser coherentes con la notación usada en el posterior análisis numérico, se define la presión de insonación $p(t)$, con una onda sinusoidal, ya que como se ha explicado anteriormente, la burbuja en el entorno del líquido se comporta como un oscilador armónico bajo la excitación externa. Por ello, la función que regula dicha presión se puede expresar como:

$$(36) \quad p(t) = P_A \sin(\omega t)$$

Si observamos atentamente la ecuación, se comprueba de que en la misma aparecen diversos números adimensionales característicos:

- Π_0 : Número adimensional referente a la presión hidrostática del medio Se expresa como un cociente de presiones.

$$(37) \quad \Pi_0 = \frac{p_0}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

- Π_v : Número adimensional referente a la presión del vapor en el interior de la burbuja. Se expresa como un cociente de presiones.

$$(38) \quad \Pi_v = \frac{p_v}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

- ϵ : Número adimensional referente a la amplitud de la oscilación de la onda de presión acústica que actúa sobre la burbuja.

$$(39) \quad \epsilon = \frac{P_A}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

- Número de Reynolds: Este parámetro adimensional relaciona la densidad, la viscosidad del fluido, la longitud característica a estudio y la frecuencia de resonancia de la burbuja. Se trata de una expresión que relaciona los términos convectivos con los términos viscosos. En función de su rango de valores, se determina si el flujo es laminar o turbulento.

$$(40) \quad Re = \frac{\rho R_0^2 \omega}{4\mu}$$

- Número de Weber: Este parámetro adimensional relaciona la densidad, la longitud característica del problema y la frecuencia de resonancia de la burbuja con la tensión superficial del líquido. Este parámetro nos permitirá analizar la inercia del fluido comparada con la tensión superficial (en este caso de la burbuja sobre el líquido exterior).

$$(41) \quad We = \frac{\rho R_0^3 \omega^2}{2\sigma}$$

Si sustituimos estos números adimensionales en la ecuación de Rayleigh-Plesset desarrollada en (35), podemos llegar a la siguiente igualdad:

$$(42) \quad \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \right) = (\Pi_0 + We^{-1} - \Pi_v)a^{-3\gamma} + \Pi_v - \frac{1}{a}We^{-1} - Re^{-1}\frac{\dot{a}}{a} - \Pi_0 - \frac{p(t)}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

Finalmente, sustituyendo en la expresión (35), la expresión para la presión acústica que se aplica a la burbuja, se obtiene que:

$$(43) \quad \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \right) = (\Pi_0 + We^{-1} - \Pi_v)a^{-3\gamma} + \Pi_v - \frac{1}{a}We^{-1} - Re^{-1}\frac{\dot{a}}{a} - \Pi_0 - \epsilon \sin(\tau)$$

Esta es la ecuación de Rayleigh-Plesset en forma adimensional. Esta ecuación es válida, siempre y cuando el fluido sea incompresible, es decir, que la densidad del líquido que rodea a la burbuja sea constante durante el proceso de insonación. Sin embargo, este modelo no será el que se utilice para desarrollar nuestro estudio, sino que se tendrán en cuenta otros efectos, como son los efectos térmicos y otros efectos de interés, como son la compresibilidad del líquido. A continuación se desarrollarán estos modelos con más detalle.

2.2 ECUACIÓN DE KELLER MIKSIS PARA LA OSCILACIÓN RADIAL

La ecuación de Keller-Miksis (30), al igual que la de Rayleigh-Plesset, describe la variación temporal del radio de la burbuja al estar sometida a un campo acústico. Esta ecuación es más compleja y exacta que la anterior, al tener en cuenta la compresibilidad del líquido. Para obtenerla, es necesario plantear las ecuaciones de Navier-Stokes, junto con la ecuación de ondas.

Dado que esta es la ecuación que vamos a resolver numéricamente, se va a proceder a su adimensionalización.

Adimensionalización

En primera instancia, se analizan los parámetros que aparecen en nuestro problema:

- El radio inicial de la burbuja R_0 , el cual define la longitud característica del problema.
- La frecuencia de resonancia ω con la cual estamos insonando nuestra burbuja, que define la escala temporal del problema.
- La densidad del líquido ρ , que recoge el efecto de las características físicas de nuestro fluido, que estamos incluyendo en el problema.

A continuación, las variables adimensionales que aparecerán en nuestro problema son:

- Si se adimensionaliza la evolución del radio de la burbuja con respecto al radio inicial de la misma, obtenemos que $a = \frac{R}{R_0}$. Esta variable hará referencia al radio de la burbuja en forma adimensional.
- Si se adimensionaliza el tiempo con la escala temporal en la que se producen variaciones en el campo acústico con el que excitamos la burbuja, se obtiene que $\tau = \omega t$. Esta variable hará referencia al tiempo que transcurre desde que la burbuja comienza a oscilar, en forma adimensional.

En la ecuación se distinguen un conjunto de números adimensionales característicos (por simplicidad en la notación, no se explicarán aquellos términos presentados anteriormente):

$$(37) \quad \Pi_0 = \frac{p_0}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

$$(38) \quad \Pi_v = \frac{p_v}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

$$(39) \quad \epsilon = \frac{P_A}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

$$(40) \quad Re = \frac{\rho R_0^2 \omega}{4\mu}$$

$$(41) \quad We = \frac{\rho R_0^3 \omega^2}{2\sigma}$$

- Π_g : Número adimensional referente a la presión del gas en el interior de la burbuja. Se expresa como un cociente de presiones.

$$(44) \quad \Pi_g = \frac{p_g}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

- Número de Mach: Este parámetro adimensional relaciona la densidad del líquido, el radio de la burbuja y la frecuencia de excitación con la velocidad del sonido en el agua. Nos permite determinar el grado de compresibilidad del gas interno de la burbuja.

$$(45) \quad M = \frac{R_0 \omega}{c}$$

Haciendo uso de estos números adimensionales, podemos adimensionalizar la ecuación de Keller-Miksis (30), obteniendo el siguiente resultado:

$$(46) \quad \ddot{a} \left(\frac{M}{Re} - a(M\dot{a} - 1) \right) + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \left(1 - \frac{M}{3} \dot{a} \right) \\ = \Pi_0 \left(\frac{1}{a^{3\gamma}} - 1 \right) + \frac{1}{We} \left(\frac{1}{a^{3\gamma}} - \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{Re} \frac{\dot{a}}{a} - (1 + M\dot{a})\epsilon \sin(\tau) \\ + M\dot{a} \left[\Pi_0 \left((1 - 3\gamma) \frac{1}{a^{3\gamma}} - 1 \right) + \frac{1}{We} \left((1 - 3\gamma) \frac{1}{a^{3\gamma}} - \frac{1}{a} \right) \right]$$

2.3 ECUACIÓN DE KELLER-MIKSIS CON EFECTOS TÉRMICOS

La ecuación de Keller-Miksis desarrollada anteriormente, es una buena aproximación, si no se tiene en cuenta los efectos. El siguiente paso es incorporar los efectos térmicos a la ecuación de Keller-Miksis. Para ello vamos a introducir dos nuevas ecuaciones que modelen la presión de la burbuja [7].

La diferencia de este modelo con la ecuación de Keller-Miksis radica en la forma de calcular la presión dentro de la burbuja p_g . Esta se analiza como:

$$(47) \quad \ddot{R}R \left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) \\ = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) \frac{1}{\rho} (p_g - P_A \sin(\omega t) - p_0) + \frac{R}{\rho c} \frac{dp_L}{dt} - \frac{4\mu\dot{R}}{\rho R} - \frac{2\sigma}{\rho R}$$

Para poder resolver la ecuación, se deberán realizar una serie de hipótesis [1], [7]:

- La temperatura de la burbuja T varía con el tiempo, por lo que se puede expresar la temperatura como una función, tal que $T = f(t)$.
- La temperatura no es uniforme en el interior de la burbuja. Para mayor simplicidad, se estima el gradiente de temperatura radial como un incremento de temperaturas limitado a una zona determinada de la burbuja.
- Los fenómenos difusivos desde la burbuja al medio líquido son despreciables. Por ello, la masa del gas en el interior del volumen de la burbuja se mantendrá constante en este ensayo.

La burbuja se ha definido como un volumen de gases que oscila en el interior de un líquido. Parece sensato considerar el comportamiento del gas como el de un gas ideal. Por tanto su presión se puede expresar como:

$$(48) \quad p_g = \rho_g R_g T(t)$$

Paralelamente a este resultado, se conoce que el volumen en el interior de la burbuja V , responde al volumen de una esfera, dado que estamos considerando que la burbuja es excitada con una onda acústica de pequeña amplitud, de modo que sufrirá oscilaciones radiales de pequeña amplitud y su forma se mantendrá esférica. Gracias a esta hipótesis, la masa del gas en el interior de la burbuja se aproxima a:

$$(49) \quad m_g = \frac{4}{3} \rho_g \pi R^3 = cte$$

Sin embargo, de esta ecuación no conocemos el valor de la evolución del radio, ni tampoco el valor de la densidad para un instante genérico. Para continuar con la

resolución del problema, debemos relacionar la masa del gas con datos conocidos: tanto la densidad del gas inicial ρ_{g_0} y la temperatura inicial del interior de la burbuja T_0 como el radio de la burbuja antes de producirse la excitación R_0 .

$$(50) \quad m_g = m_{g_0} = cte$$

$$(51) \quad m_g = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \left(\frac{p_0 + \frac{2\sigma}{R}}{R_g T_0} \right)$$

Donde $\rho_{g_0} = \left(\frac{p_0 + \frac{2\sigma}{R}}{R_g T_0} \right)$.

A continuación, se aplicarán las leyes de la termodinámica, para poder dar una expresión de la temperatura y su evolución en el interior de la burbuja. Aplicando el Primer Principio de la Termodinámica.

$$(52) \quad \dot{m}_g c_v \frac{dT}{dt} = \dot{Q} - p_g \frac{dV}{dt}$$

Si derivamos el volumen de la burbuja, y lo introducimos en la ecuación (52), queda como sigue:

$$(53) \quad \dot{m}_g c_v \frac{dT}{dt} = \dot{Q} - 4p_g \pi R^2 \dot{R}$$

Por otro lado, el flujo de calor entre la burbuja y el entorno que la rodea se puede aproximar mediante la ecuación de conducción del calor de Fourier:

$$(54) \quad \dot{Q} = 4\pi R^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

Donde T_0 hace referencia a la temperatura de la burbuja en el instante inicial y λ hace referencia a la conductividad térmica de la burbuja y $\frac{\partial T}{\partial r}$ hace referencia al gradiente de temperaturas. Por sencillez en los resultados, se ha aproximado el gradiente de temperaturas como se ha comentado en las anteriores hipótesis :

$$(55) \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \left(\frac{T_0 - T}{L_{TH}} \right)$$

donde L_{TH} hace referencia a la longitud de penetración térmica en la burbuja y se puede expresar como:

$$(56) \quad L_{TH} = \min \left(\sqrt{\frac{R\chi}{\dot{R}}}, \frac{R}{\pi} \right)$$

donde χ hace referencia a la difusividad térmica de la burbuja.

Una vez definidos estos términos, comenzamos a evaluar la ecuación de Keller-Miksis con efectos térmicos. En primera aproximación, se supone que la presión del volumen del gas encerrado en la burbuja no es constante, sino que variará con el tiempo en función de la oscilación del sistema. Dentro del sistema, los únicos parámetros que van a variar con el tiempo, son temperatura en el interior de la burbuja y el radio de la misma. Si se tiene en cuenta esta afirmación, la presión del gas variará como sigue:

$$(57) \quad \dot{p}_g = \frac{dp_g}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_g}{\frac{4}{3}\pi R^3} R_g T \right]$$

Derivando la expresión (57), se obtiene que:

$$(58) \quad \dot{p}_g = \frac{3}{4\pi} m_g R_g \left(-3 \frac{\dot{R}}{R^4} T + \frac{\dot{T}}{R^3} \right)$$

Esta ecuación se puede simplificar, de manera que le sea más sencillo al lector poder interpretar su significado en la ecuación de Keller-Miksis. De esta forma, la ecuación de la evolución de la presión del volumen de gas en el entorno del líquido (58), se puede expresar como:

$$(59) \quad \dot{p}_g = \rho_g R_g \left(-3 \frac{\dot{R}}{R} T + \dot{T} \right)$$

Si agrupamos términos, se simplifica (59), como:

$$(60) \quad \dot{p}_g = \rho_g R_g T \left(-3 \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{T}}{T} \right) = p_g \left(-3 \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{T}}{T} \right)$$

De la simplificación de la ecuación, se observa que la evolución de la presión a lo largo del tiempo dependerá no solo de la presión del gas en el instante en que se está evaluando el proceso, sino que también dependerá del radio y la temperatura en el interior de la burbuja y de su evolución a lo largo del tiempo.

Para la adimensionalización del problema, se deben utilizar una serie de parámetros adimensionales, tal y como se hizo en la resolución de Keller-Miksis que se desarrollo en el anterior epígrafe (Expresión (46)). En este caso, la ecuación de Keller-Miksis incorpora la contribución de los efectos térmicos. Parece razonable definir cuatro parámetros fundamentales:

- El radio inicial de la burbuja R_0 , el cual define longitud característica del problema.
- La frecuencia de resonancia ω con la cual estamos insonando nuestra burbuja,

que define la escala temporal del problema.

- La densidad del líquido ρ , que recoge el efecto de las características físicas de nuestro fluido que estamos incluyendo en el problema.
- La temperatura inicial en el interior de la burbuja T_0 .

Aplicando dichos parámetros para poder obtener una adimensionalización de la ecuación de estudio, se pueden definir las siguientes variables adimensionales de nuestro problema:

- El radio adimensional de la burbuja: $a = \frac{R}{R_0}$.
- El tiempo adimensional del problema: $\tau = \omega t$.
- La temperatura adimensional en el interior de la burbuja: $\theta = \frac{T}{T_0}$.

Consecuentemente, se puede definir una serie de números adimensionales, los cuales aparecerán en el proceso de adimensionalización del problema (Véase el epígrafe 2.2 para complementar con las definiciones de algunos parámetros que a continuación se presentarán):

$$(37) \quad \Pi_0 = \frac{p_0}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

$$(39) \quad \epsilon = \frac{P_A}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

$$(40) \quad Re = \frac{\rho R_0^2 \omega}{4\mu}$$

$$(41) \quad We = \frac{\rho R_0^3 \omega^2}{2\sigma}$$

$$(44) \quad \Pi_g = \frac{p_g}{\rho R_0^2 \omega^2}$$

$$(45) \quad M = \frac{R_0 \omega}{c}$$

- Π_{g0} : Presión en el interior del gas adimensionalizada y la frecuencia de insonación con la masa del gas interior mediante la ecuación de gases ideales.

$$(61) \quad \Pi_{g0} = \frac{m_g R_g T_0}{4/3 \pi \rho R_0^5 \omega^2}$$

A partir de todas estas variables, se llega a la solución de Keller-Miksis con efectos térmicos. Se deja al lector la resolución del problema sustituyendo los parámetros anteriormente definidos. De esta forma, la ecuación se expresa como:

$$(62) \quad (1 - M\dot{a})\ddot{a}a + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \left(1 - \frac{M\dot{a}}{3}\right) \\ = (1 + M\dot{a})(\Pi_g - \epsilon \sin(\tau) - \Pi_0) + aM\Pi_g \left(-3\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\theta}}{\theta}\right) - \frac{1}{Re}\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{We}\frac{1}{a}$$

$$(63) \quad \Pi_g = \Pi_{g0} \frac{T}{a^3}$$

$$(64) \quad \dot{T} = \Lambda \frac{a^2}{L_{TH}} (1 - T) - 3(\gamma - 1) \frac{\dot{a}}{a} T$$

$$(65) \quad L_{TH} = \min \left(\left(Pe^{-1} \frac{a}{|\dot{a}|} \right)^{1/2}, \frac{a}{\pi} \right)$$

Esta será la ecuación que se utilizará durante este trabajo para estudiar el comportamiento de la burbuja ante ondas de presión acústica de baja amplitud.

2.4 RÉGIMEN LINEAL

Las ecuaciones anteriormente descritas son no lineales, por lo que su integración numérica es costosa desde el punto de vista computacional. En el caso de excitar la burbuja con amplitudes acústicas bajas, las oscilaciones de ésta serán prácticamente lineales. En este caso, podríamos modelar su comportamiento con una ecuación lineal, cuya integración numérica es menos costosa.

El objetivo de este epígrafe es buscar una solución lineal de la ecuación anterior. Para ello, se supondrá que la variación del radio debido a la actuación del campo acústico será muy pequeña con respecto al radio original. Para la resolución, se partirá de la ecuación de Keller-Miksis expresada en forma adimensional:

$$(66) \quad \ddot{a} \left(\frac{M}{Re} - a(M\dot{a} - 1) \right) + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \left(1 - \frac{M}{3}\dot{a} \right) \\ = \Pi_0 \left(\frac{1}{a^{3\gamma}} - 1 \right) + \frac{1}{We} \left(\frac{1}{a^{3\gamma}} - \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{Re} \frac{\dot{a}}{a} - (1 + M\dot{a})\epsilon \sin(\tau) \\ + M\dot{a} \left[\Pi_0 \left((1 - 3\gamma) \frac{1}{a^{3\gamma}} - 1 \right) + \frac{1}{We} \left((1 - 3\gamma) \frac{1}{a^{3\gamma}} - \frac{1}{a} \right) \right]$$

Para poder linealizar la ecuación, debemos introducir una nueva relación, tal que:

$$(67) \quad a = \frac{R}{R_0} = 1 + \epsilon x(t) \quad \text{Donde } \epsilon \ll 1$$

En el caso de que el orden de magnitud de ϵ fuera mayor que la unidad (lo que equivaldría a suponer oscilaciones radiales mayores que el radio original), aparecerían

efectos debidos a la transferencia de calor desde la burbuja al medio que le rodea. Para el caso de estudio, se modelará mediante un exponente politrópico γ y se supondrá que la viscosidad de la burbuja es mayor que la del líquido que la rodea [2].

A continuación, se buscará una solución al problema de Keller-Miksis, de forma que seamos capaces de aproximar su solución en forma adimensional, a la ecuación que rige un oscilador armónico simple. En forma matemática:

$$(68) \quad f(\tau) = \ddot{x} + \beta \dot{x} + \Omega_0^2 x$$

Finalmente, si sustituimos en la ecuación de Keller-Miksis adimensionalizada (66), se podrá llegar a la solución buscada:

$$(69) \quad \begin{aligned} & \varepsilon \ddot{x} \left(\frac{M}{Re} - (1 + \varepsilon x)(M\varepsilon \dot{x} - 1) \right) + \frac{3}{2} (\varepsilon \dot{x})^2 \left(1 - \frac{M}{3} \varepsilon \dot{x} \right) \\ &= \Pi_0 (1 - 3\gamma \varepsilon x - 1) + \frac{1}{We} ((1 - 3\gamma \varepsilon x) - (1 - \varepsilon x)) - \frac{1}{Re} \varepsilon \dot{x} + (1 + M\varepsilon \dot{x}) \\ &+ M\varepsilon \dot{x} \left[\Pi_0 ((1 - 3\gamma)(1 - 3\gamma \varepsilon x) - 1) \right. \\ &\left. + \frac{1}{We} ((1 - 3\gamma)(1 - 3\gamma \varepsilon x) - (1 - \varepsilon x)) \right] \end{aligned}$$

A primera vista, la ecuación tiende a complicarse. Sin embargo, no es del todo cierto. Como se dijo anteriormente, $\varepsilon \ll 1$, por lo que se asumirán errores en la ecuación del orden $\varepsilon^2 \cong 0$. Si se desprecian dichos errores, la ecuación (69) nos queda igual a:

$$(70) \quad \varepsilon \ddot{x} = -3\gamma \Pi_0 \varepsilon x + \frac{\varepsilon x}{We} (1 - 3\gamma) - \frac{1}{Re} \varepsilon \dot{x} - \varepsilon \sin(\tau) + M\varepsilon \dot{x} \left(-3\gamma \Pi_0 - \frac{3\gamma}{We} \right)$$

Una vez simplificada la ecuación, debemos ser capaces de interpretar los términos que aparecen en ella, de forma que podamos expresar mediante la ecuación de un oscilador armónico simple. Si visualizamos la ecuación, las constantes β y Ω_0^2 se expresan como:

$$(71) \quad \beta = \frac{1}{Re} + M \left(3\gamma \Pi_0 + \frac{3\gamma}{We} \right)$$

$$(72) \quad \Omega_0^2 = 3\gamma \Pi_0 + \frac{1}{We} (3\gamma - 1)$$

En conclusión, la ecuación del oscilador armónico simple que se va a utilizar para la siguiente integración del problema, se expresa como:

$$(73) \quad -\varepsilon \sin(\tau) = \ddot{x} + \beta \dot{x} + \Omega_0^2 x$$

Para la realización de la integración, se estudiará la evolución del radio de la burbuja para un tiempo suficientemente largo, de forma que la burbuja pueda alcanzar el régimen estacionario tras oscilar.

2.5 OTROS MODELOS DE ESTUDIO

En el desarrollo de nuevas ecuaciones que pudieran resolver el comportamiento de la burbuja de forma matemática, varios estudiosos investigaron la forma de dar una solución precisa al problema.

Para este caso que se está resolviendo, se han utilizado las ecuaciones Keller-Miksis y de Keller-Miksis linealizada. Sin embargo, es interesante mencionar a otros autores que han dedicado su vida al estudio y mejora de las ecuaciones anteriormente descritas. Se destaca el trabajo de H.G. Flynn y su estudio sobre la cavitación y sus efectos, el trabajo de Neppiras y el de Apfel y su aplicación en el ámbito clínico.

2.5.1 MODELO DE GILMORE

Existen varios modelos que estudian dicho fenómeno. Uno de ellos fue el expuesto por Gilmore (1952) y revisado por Vokurka (1986), asumiendo que el fluido era isentrópico [6]. La ecuación en cuestión se definía como:

$$(74) \quad \ddot{R}R \left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) = H \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) + \frac{\dot{R}}{c} + \dot{H} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)$$

En esta ecuación, el parámetro H hace referencia a la diferencia de presiones entre la pared de la burbuja p_L y el infinito p_∞ . Además aparece la velocidad del sonido en el líquido c , en contacto con la pared de la burbuja. Tanto H como c son funciones de la variación de presión en el líquido en contacto con la pared.

2.5.2 MODELO HERRING-TRILLING

Otro modelo que estudia el fenómeno de la compresibilidad del fluido es el expuesto por Herring-Trilling [6]. En este modelo se mantiene la hipótesis de velocidad del sonido constante, gracias a que $p/\rho = cte$. Este modelo es útil para predecir valores de cualquier cavitación estable o cavitaciones transitorias cuando la burbuja se expansiona poco. El modelo se puede describir como:

$$(75) \quad \ddot{R}R \left(1 - \frac{2\dot{R}}{c}\right) + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{4\dot{R}}{3c}\right) = \frac{R}{\rho c} \frac{dp_L}{dt} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) + \frac{p_L - p_\infty}{\rho}$$

En este modelo se puede encontrar el número adimensional M , que hace referencia al número de Mach (mide efectos de compresibilidad). Este modelo se puede simplificar,

dado que el número de Mach se expresa como $M = \dot{R}/c$ y la velocidad del sonido es mayor que la velocidad radial de la burbuja. En resumen, al ser $M \ll 1$, estos términos de la ecuación se pueden despreciar, y se llega a la siguiente solución.

$$(76) \quad \ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{R}{\rho c} \frac{dp_L}{dt} + \frac{p_L - p_\infty}{\rho}$$

Esta solución, si se elimina el término p_L (que hace referencia al amortiguamiento debido a la radiación), es la ecuación de Rayleigh-Plesset que se ha descrito anteriormente [6].

2.6 ANÁLISIS DE RESONANCIA

En epígrafes anteriores, hemos definido la ecuación de un oscilador armónico simple para poder linealizar la ecuación de Keller-Miksis y hallar una solución lineal para nuestro problema. Para ello, se adimensionalizó el radio de la burbuja, tal y como expresa la expresión (67) y se analizó el comportamiento de la misma, mediante la ecuación de un oscilador armónico simple, tal y como se expresa en la ecuación (68).

Gracias a estas dos expresiones, se consiguió linealizar la ecuación de Keller-Miksis en forma adimensional, obteniendo la solución expresada en la ecuación (73). En esta ecuación, la frecuencia propia f_c se expresa como $f_c = \frac{\Omega_0}{2\pi}$, mientras que β hace referencia al coeficiente de amortiguamiento de la ecuación, que se expresará sin unidades. A continuación, nuestro objetivo es describir el comportamiento del radio de la burbuja a lo largo del tiempo. Para poder resolver la ecuación, expresaremos la solución particular del radio como:

$$(77) \quad x = X e^{i\omega t}$$

A partir de la expresión (77) y despejando en la expresión (73), podemos expresar la ecuación del oscilador armónico simple, como:

$$(78) \quad \epsilon e^{i\omega t} = -\omega^2 X e^{i\omega t} + i\beta X \omega e^{i\omega t} + \Omega_0^2 X e^{i\omega t}$$

Si agrupamos los términos de la expresión (78):

$$(79) \quad (\Omega_0^2 - \omega^2)X + i\beta\omega X = \epsilon$$

Llamemos a $X = |X|e^{i\varphi} = |X|\cos\varphi - i|X|\sin\varphi$ y sustituyamos este resultado en la expresión (79):

$$(80) \quad (\Omega_0^2 - \omega)|X| + i\beta\omega|X| = \epsilon(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Finalmente, despejando la expresión (80) se obtiene la solución de la ecuación:

$$(81) \quad |X| = \frac{\epsilon}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\beta)^2}}$$

A partir de la expresión (81) se definirá la curva de resonancia de la burbuja. Para poder despejar la frecuencia de resonancia de la burbuja, debemos derivar la anterior expresión con respecto al radio de la burbuja, tal que hallemos un máximo en la curva de resonancia:

$$(82) \quad \frac{d|X|}{d\omega} = 0$$

$$(83) \quad \frac{d}{d\omega} [(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\beta)^2] = 0$$

Si derivamos la expresión (83):

$$(84) \quad \omega[2\Omega_0^2 - 2\omega^2 - \beta^2] = 0$$

En la expresión (84) obtenemos dos soluciones: Una solución que es trivial e igual a $\omega = 0$ y no interesa, y otra solución, que nos dará el valor de la frecuencia de resonancia de la burbuja:

$$(85) \quad \omega = f_{res} = \sqrt{\Omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2}}$$

La frecuencia de resonancia de la burbuja, anteriormente hallada, será menor que la frecuencia central de la misma. Entre los parámetros que aparecen en la ecuación (79), se define β como un parámetro independiente de la velocidad angular Ω .

2.7 SIMULACIONES PARA UN OSCILADOR ARMÓNICO MEDIANTE UN CHIRP

En este punto de la resolución del problema, hemos analizado como un campo acústico puede generar una onda de una cierta presión, la cual provocará que nuestra burbuja oscile según dicho campo entorno a un punto de equilibrio. Como se ha dicho anteriormente, se espera que la amplitud de las oscilaciones de la burbuja sea máxima, cuando la frecuencia de excitación se corresponde con la máxima del sistema. A continuación, se va a analizar una herramienta que nos permitirá simplificar los resultados obtenidos en nuestro estudio.

Se puede hacer una definición de qué es un *chirp*: Se conoce como *chirp* a un tipo de

señal, cuya frecuencia aumenta o disminuye en el tiempo, actuando como una señal de barrido [8]. Existen distintos modelos referentes a esta señal. Para el caso de estudio, se destaca la utilización de un *chirp* lineal, cuya frecuencia variable con el tiempo $f(t)$ se puede expresar como:

$$(86) \quad f(t) = f_c + kt$$

Donde f_c hace referencia a la frecuencia central del sistema para $t = 0$ y k es un factor de crecimiento de frecuencia, que se puede expresar como:

$$(87) \quad k = \frac{f_{max} - f_{min}}{t_1 - t_0}$$

Del análisis de este resultado, y conociendo que la frecuencia máxima f_{max} , y la frecuencia mínima f_{min} , se pueden expresar respectivamente como:

$$(88) \quad f_{max} = f_c + \frac{BW}{2}$$

$$(89) \quad f_{min} = f_c - \frac{BW}{2}$$

Se deduce que k se puede expresar finalmente como:

$$(90) \quad k = \frac{BW}{t_1 - t_0}$$

En esta ecuación, las siglas *BW* hacen referencia al ancho de banda del sistema (*Band Width*), que para nuestro estudio, supondrá un 90% más de la frecuencia central de nuestra burbuja. Adicionalmente, el valor de k será positivo, cuando se utilicen *chirps* de barrido positivos, es decir, mayores a medida que aumenta el tiempo, y valores de k negativos cuando el barrido sea menor a medida que aumenta el tiempo.

Una vez definida la frecuencia con la cual actuará nuestro *chirp*, se expresará la ley que rige el comportamiento del *chirp*. La función que permite describir el movimiento es una función senoidal, tal que:

$$(91) \quad x(t) = \sin\left(\varphi_0 + 2\pi \int_0^t f(t)dt\right) = \sin(\varphi_0 + 2\pi(f_c + kt)t)$$

Donde φ_0 hace referencia al desfase inicial de nuestra señal.

Para comprobar el funcionamiento de un *chirp*, se mostrará a continuación dos ejemplos que simulen su comportamiento. Para ello, se utilizará un *ode45* que nos permita obtener una solución numérica del problema:

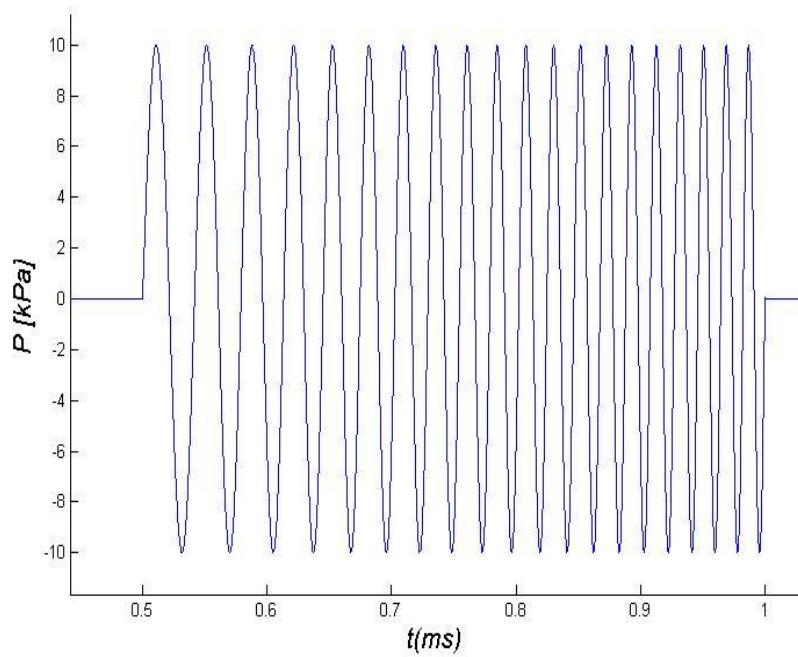


Figura 2.1: Evolución del chirp a lo largo del tiempo

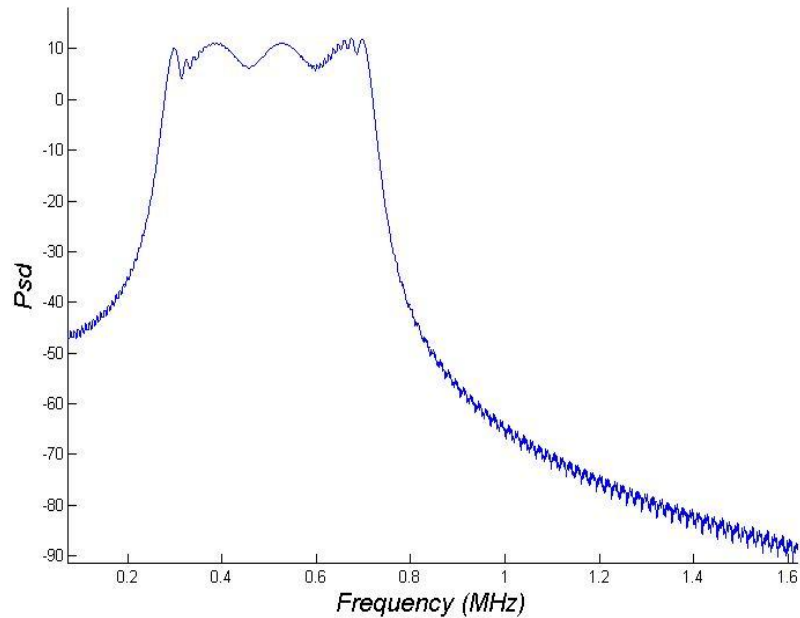


Figura 2.2: Espectro del chirp

En este ejemplo se ha presentado un caso genérico, excitando a la burbuja de forma que se pudiera visualizar el efecto del *chirp*.

Este fenómeno aparecerá en los casos que estudiamos mediante las ecuaciones de

Keller-Miksis y su linealización. Por ejemplo, al analizar la respuesta de la presión de una burbuja de radio $R_0 = 8 \mu m$ ante una onda de presión de 5000 Pa:

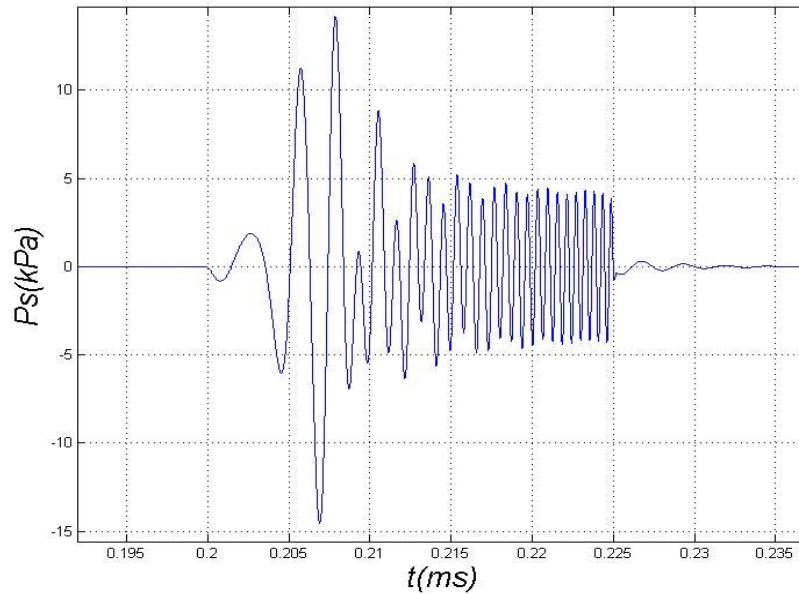


Figura 2.3 Evolución de la presión en la burbuja de 8 micras

En el caso estudiado se puede comprobar cómo la burbuja oscila según el campo de presión con el que ha sido excitado, que en este caso ha sido utilizando una amplitud $P_A = 5000 Pa$ y una frecuencia de excitación de 1 MHz. Asimismo se definió un tiempo de simulación de 1 ms. En esta ocasión, se presenta un *chirp* de barrido positivo, de forma que la frecuencia aumenta a medida que transcurre el tiempo en el estudio realizado. Este fenómeno se comprueba tanto en las gráficas referentes a la evolución radial de la burbuja así como en la gráfica de la presión.

Un rápido análisis de la gráfica referente a la presión, demuestra que la máxima amplitud se alcanza cuando la frecuencia de la señal de excitación se corresponde con la de resonancia del sistema. El error cometido en el amortiguamiento es aproximadamente un 25%. Este error aumenta a medida que el tamaño de la burbuja aumenta, así como con la frecuencia que se está aplicando al sistema.

2.8 RESOLUCIÓN MEDIANTE FORTRAN Y MATLAB: MÓDULOS UTILIZADOS

El objetivo del proyecto, tal y como se ha definido en los primeros capítulos, es el estudio del comportamiento de una burbuja ante la acción de un campo acústico. En los anteriores epígrafes de este capítulo, hemos definido las ecuaciones de Rayleigh-Plesset,

de Keller-Miksis con efectos térmicos y su linealización, de forma que se pueda explicar cómo evoluciona la burbuja ante dicha excitación.

En este epígrafe se tratará de describir las herramientas que permitirán integrar dichas ecuaciones y dar una solución explícita de como varía el radio y la presión de la burbuja, ante una onda sonora. Dado que la solución al problema es compleja de resolver de forma manual, se utilizarán varios programas informáticos que nos permitan simplificar la evaluación del problema.

A continuación, se describen los programas utilizados para el proyecto.

2.8.1 MATLAB

Matlab es un software informático que permite la resolución de problemas matemáticos complejos, utilizando su propio lenguaje de programación. En nuestro caso de estudio, analizaremos las ecuaciones de Keller-Miksis con efectos térmicos y de Keller-Miksis linealizada, definidas anteriormente. Debido a la complejidad del problema y a la búsqueda de una solución óptima, se requiere que, tanto la integración como la representación de los datos sean correctas, sino existiría un fallo en la precisión del problema y la solución no podría ser tomada como válida. Se necesitará de un ordenador poco convencional, que nos permita simular el problema, con un orden de precisión adecuado y en un tiempo de integración preferiblemente pequeño.

Para la integración del problema en Matlab, se utilizará un *ode45*. Esta función, implícita en la biblioteca de funciones del programa que se está utilizando, nos permite resolver el problema, introduciendo anteriormente la ecuación diferencial que se pretende resolver. La sintaxis que utiliza es la siguiente:

$[t, x] = \text{ode45}(\text{odefun}; \text{tspan}; x0)$

- Las variables t y x hacen referencia al vector tiempo y a la matriz de las variables dependientes, respectivamente.
- *odefun* es el nombre de la función que se esté utilizando.
- *tspan* especifica el intervalo de tiempo en el que transcurre el problema. Se definirá como un vector en el que se indicará el tiempo inicial y final de integración del problema.
- $x0$ es el vector que contiene los valores iniciales del problema.

A partir de esta función de Matlab seremos capaces de resolver la ecuación linealizada, de forma que podamos dar una solución a la ecuación armónica de la burbuja.

2.8.2 FORTRAN

Fortran es un lenguaje de programación de alto nivel que se dedica a la resolución de problemas de cálculo numérico. En el caso a estudiar, se utilizará Fortran para poder integrar la ecuación de Keller-Miksis con efectos térmicos, así como definir algunas propiedades de la onda. Será un programa auxiliar en nuestro estudio, de forma que el caso que se estudie se inicializará en Matlab y se integrará en Fortran para analizar, de nuevo en Matlab, los resultados obtenidos.

Para la integración del problema utilizaremos los métodos de Runge-Kutta. Los métodos de Runge-Kutta son un conjunto de métodos iterativos que nos permiten resolver de forma numérica ecuaciones diferenciales, mediante aproximación a la solución mediante un problema de valor inicial [12]. Para la resolución del problema de valor inicial, se define:

$$(92) \quad y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

A continuación, el problema de Runge-Kutta, se define por la siguiente ecuación:

$$(93) \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde:

$$(94) \quad \begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \\ k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i\right) + \frac{1}{2}k_2h \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \end{cases}$$

El método consiste en que el siguiente valor que se obtiene y_{n+1} , está determinado por el valor actual y_n , más el producto del tamaño del intervalo h por una pendiente estimada k . De esta forma, cada valor de k hace referencia a:

- k_1 hace referencia a la pendiente al principio del intervalo.
- k_2 hace referencia a la pendiente en el punto medio del intervalo.
- k_3 hace referencia a la pendiente en el punto medio del intervalo, pero utilizando esta vez k_2 para determinar su valor.
- k_4 hace referencia a la pendiente en el final del intervalo.

A partir de este método se resolverá la ecuación del oscilador armónico presentada por la ecuación de Keller-Miksis, mediante Fortran.

2.8.3 ECUACIÓN DE KELLER-MIKSIS

En el caso de estudio de la ecuación de Keller-Miksis, definiremos un programa, subdividido en tres subprogramas. A partir de la definición de los parámetros característicos de nuestro problema, como son las propiedades de la burbuja, del entorno líquido que la rodea y de la onda con la cual estamos excitando la burbuja se creará el caso a estudiar en otro subprograma. Para nuestro trabajo, se estudiarán burbujas de un rango de radios entre 2 y 10 μm , y se excitará con una onda acústica, cuyo rango de presiones se encuentra entre 5000 y 20000 Pa. Asimismo, la frecuencia central de insonación oscilará entre 0.1 y 1 MHz.

Una vez creado el caso de estudio, el caso a estudiar se enviará a Fortran para poder resolverlo. Los datos que hemos creado anteriormente en Matlab se traspasarán a Fortran, a partir de donde se calcularán parámetros necesarios, como la frecuencia modulada o chirp que se va a utilizar para modular nuestra señal. A partir de estos datos y los generados en el módulo Fortran, se integrará la ecuación de Keller-Miksis con efectos térmicos que se describió en el epígrafe 2.2. La solución de esta ecuación, tanto de la evolución del radio de la burbuja, así como de la presión en el interior de la misma serán recogidos y se volverán a cargar en Matlab.

A partir de la solución de Keller-Miksis hallada en Fortran, se graficarán los resultados obtenidos para cada uno de los casos que hayamos cargado anteriormente. En concreto, se graficarán la evolución temporal del radio de la burbuja con respecto al tiempo y la evolución de la presión de la burbuja con respecto al tiempo.

Adicionalmente, se realizará un análisis de Fourier a la presión de la burbuja, de forma que se pueda visualizar como varía la presión en función de la frecuencia con la cual se está excitando la burbuja y se hará una gráfica que muestre dicho fenómeno. Para ello utilizaremos una gráfica logarítmica.

A continuación se expondrán algunos ejemplos de lo que se pretende estudiar con estos programas:

Ejemplo a estudiar: Burbuja de radio $R_0 = 20 \mu\text{m}$, frecuencia central $f_c = 1 \text{ MHz}$, presión de insonación: $P_A = 5000 \text{ Pa}$.

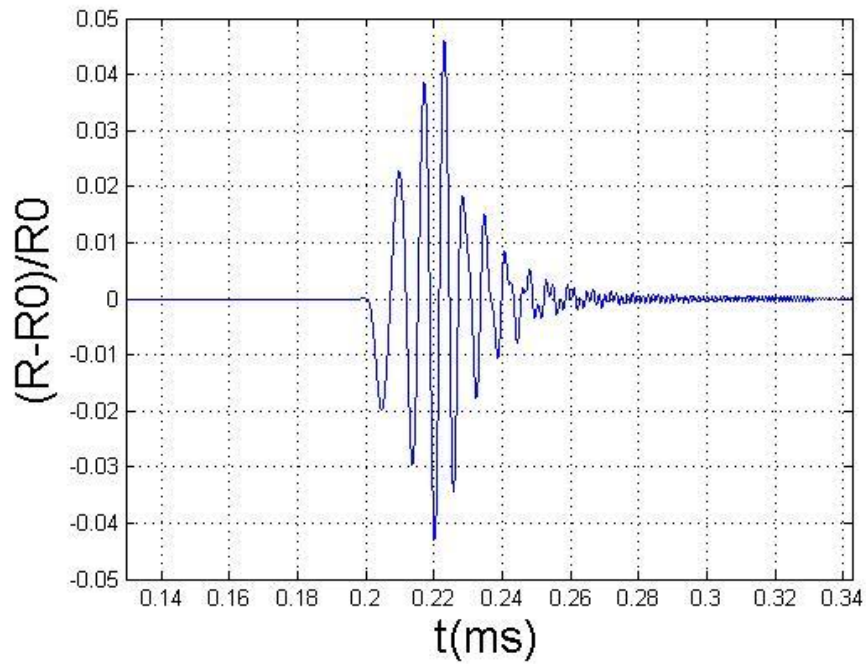


Figura 2.4 Evolución radial de la burbuja con respecto al tiempo (Keller-Miksis)

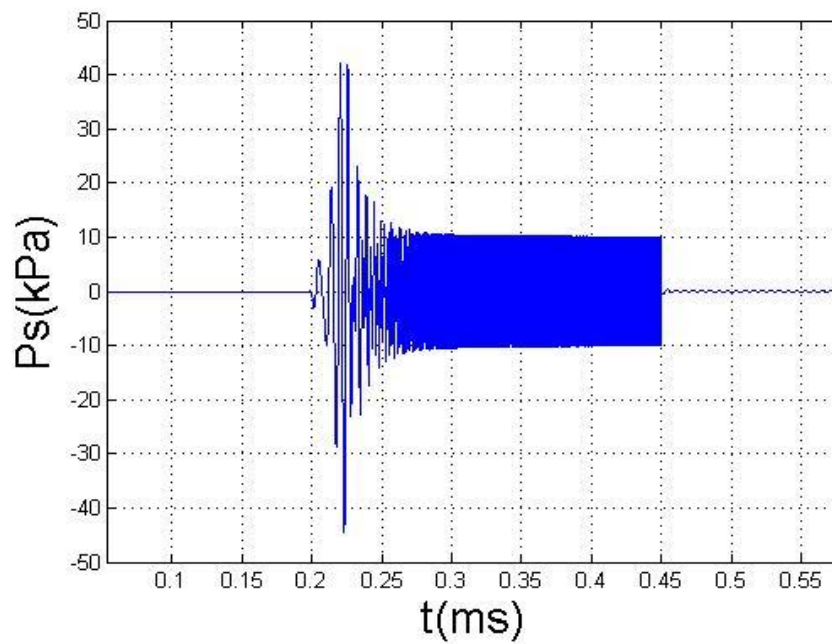


Figura 2.5 Evolución temporal de la presión de la burbuja

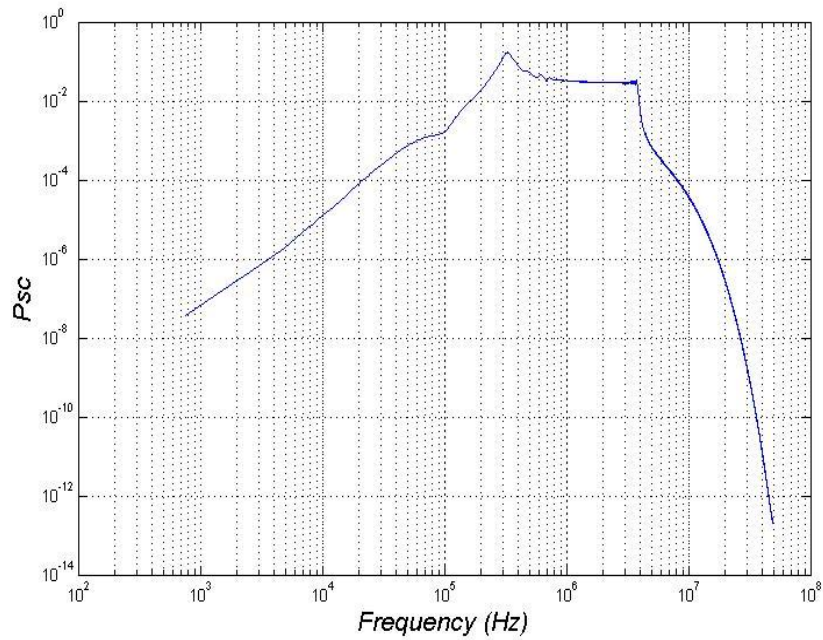


Figura 2.6 Espectro de presiones para la burbuja estudiada

De los resultados obtenidos, se visualiza que la mayor amplitud en la presión de la burbuja se alcanza para la frecuencia central que hemos escogido, lo cual es lógico desde el punto de vista de la teoría de señales, pues se corresponde con el punto de máxima amplitud de la señal.

2.8.4 ECUACIÓN LINEALIZADA

En el caso de estudio de la ecuación linealizada, se creará un programa similar al que utilizamos para resolver la ecuación de Keller-Miksis. En este caso, la herramienta utilizada es Matlab. Al igual que se aplicó en el programa anterior, se definirán las propiedades referentes a la burbuja, el entorno fluido que la rodea y las de la onda. A continuación, se definirán en otro subprograma los distintos parámetros característicos del problema, como el tiempo del pulso o el chirp y finalmente, mediante un tercer subprograma, integraremos la función en cuestión.

Para el caso de estudio, se analizarán burbujas de radios comprendidos entre 2 y 10 μm y se excitarán con ondas acústicas, cuyas presiones estén comprendidas entre 0.1 y 1 MHz.

El objetivo de comparar las ecuaciones de Keller-Miksis y la linealizada es, además de estudiar cómo evoluciona la burbuja a lo largo del tiempo, ver si la ecuación de lineal falla ante variaciones del radio muy grandes con respecto al tamaño inicial.

A continuación, se expondrá un ejemplo de los gráficos que se pueden obtener durante este estudio.

Ejemplo a estudiar: Burbuja de radio $R_0 = 3 \mu\text{m}$, frecuencia central $f_c = 0.5 \text{ MHz}$, presión de insonación: $P_A = 20000 \text{ Pa}$.

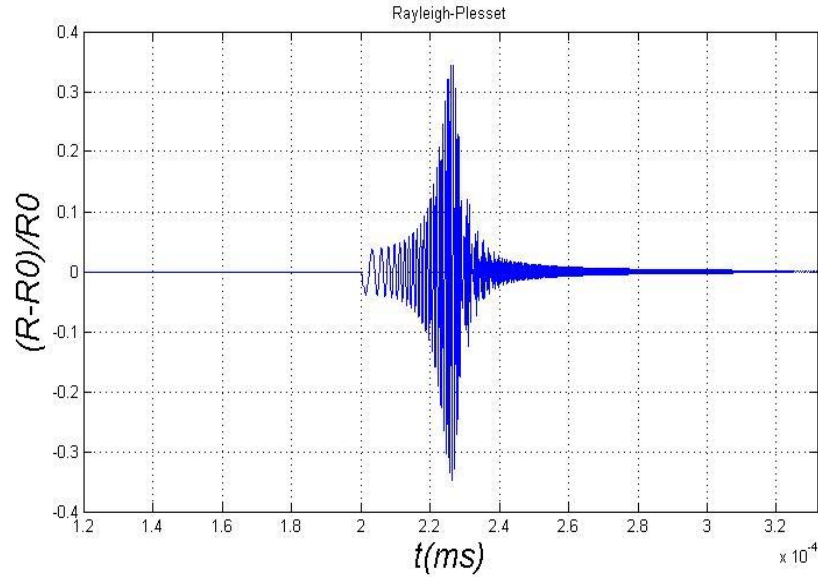


Figura 2.7: Evolución radial de la burbuja con respecto al tiempo (linealizada)

En los siguientes capítulos, se realizará un análisis detallado sobre diferentes tamaños de burbujas y su comportamiento a distintas presiones acústicas. Se tratará de visualizar las similitudes entre las soluciones de Keller-Miksis y su expresión linealizada cuando los tamaños de las burbujas sean más pequeños, así como visualizar el fallo que existe en la solución lineal, cuando se aplica una onda de gran amplitud.

CAPÍTULO 3: RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo se representarán los resultados numéricos referidos a nuestro sistema. Hasta el momento, nuestro estudio ha estado enfocado a describir las ecuaciones que rigen el comportamiento de la burbuja y el software informático que se utilizarán para describir dicho movimiento. A continuación se dará un paso más para poder demostrar la eficacia de dichas ecuaciones.

Para la adecuada resolución del problema, se estudiarán tres burbujas de distinto tamaño, las cuales serán excitadas por un campo acústico de distinta presión cada uno. En concreto, se estudiará la evolución de tres microburbujas de 2,5 y 10 μm sometidas a un campo acústico de 5,10 y 20 kPa respectivamente. El problema se estudiará desde la perspectiva de las ecuaciones de Keller-Miksis y Keller-Miksis linealizada y se hará un análisis crítico de los resultados obtenidos.

Se destaca que se han definido anteriormente las propiedades del líquido y del gas interno de la burbuja (densidades, presión de vapor, conductividad térmica,...), las cuales se van a utilizar como constantes en todos los ensayos realizados.

3.1 ANÁLISIS DE LA BURBUJA DE 2 MICRAS

Para el estudio de las ecuaciones de Keller-Miksis y Keller-Miksis linealizada, se describen los siguientes parámetros:

$$R_0 = 2 \mu m$$

$$f_c = 1 MHz$$

$$BW = 1.9 MHz$$

$$p_0 = 101325 Pa$$

$$PL = 1 * 10^{-3} s$$

$$DC = 25$$

$$t = 2 * 10^{-3} s$$

$$t_o = 2 * 10^{-4}$$

Asimismo, durante la resolución de la ecuación linealizada, con el software informático, se ha obtenido un factor de amortiguamiento $\beta = 0.1991$.

Nuestro objeto de estudio es analizar la variación del radio de la burbuja ante variaciones en la presión de insonación generada por el campo acústico. Para ello, se analizará como primer caso una presión $P_A = 5000Pa$.

Los resultados obtenidos se describen de forma gráfica como:

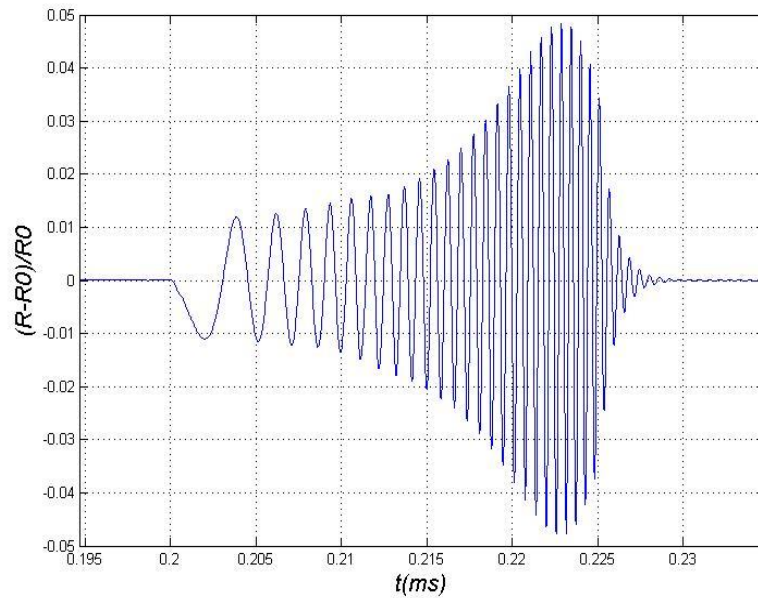


Figura 3.1: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis)

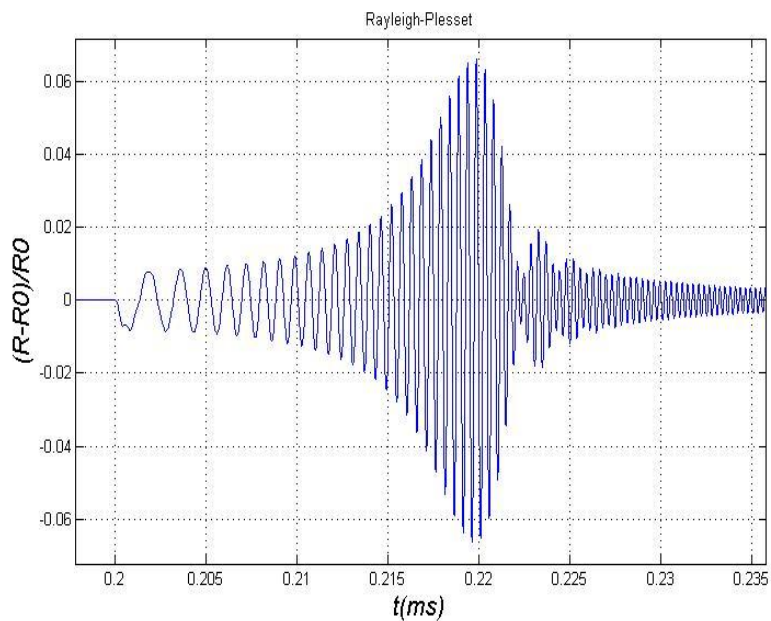


Figura 3.2: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (linealizada)

En estas gráficas, se ha representado la evolución temporal de la variación adimensional del radio con respecto al inicial a lo largo del tiempo, expresado en milisegundos. La burbuja se expande y se contrae, a razón de un 6% como máximo con respecto a su tamaño original.

En vista de los resultados obtenidos, podemos comprobar que las variaciones en el radio de la burbuja mediante los dos métodos de cálculo utilizados, tienen una respuesta similar a lo largo del tiempo de integración, si bien se desarrolla antes en el tiempo la mayor amplitud en la oscilación en la ecuación linealizada, que en la ecuación de Keller-Miksis. Finalmente, transcurrido el tiempo de aplicación de la onda acústica, la el radio de la burbuja se relaja y vuelve a su forma original.

Posteriormente, se estudiará la evolución de la presión con el tiempo y el espectro generado mediante una transformada de Fourier:

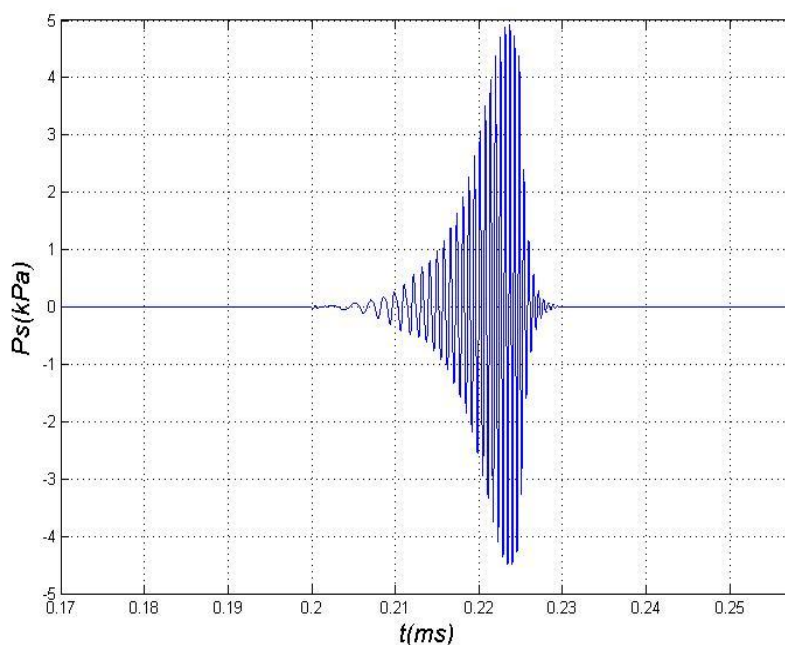


Figura 3.3: Evolución de la presión con respecto al tiempo

En esta gráfica, se estudia la evolución de la presión con la cual insonamos nuestra burbuja con respecto al tiempo. Como se puede visualizar en esta gráfica y en las gráficas de la evolución del radio de la burbuja respecto al tiempo, el impulso inicial de ambas coinciden en el mismo tiempo, lo cual es lógico, porque la evolución del radio de la burbuja es una respuesta a la onda acústica aplicada.

Adicionalmente, podemos visualizar que la presión aplicada a la burbuja sigue una onda sinusoidal, tal y como se ha definido en el problema de estudio, lo cual genera las expansiones y contracciones de la burbuja. La máxima amplitud en la presión aplicada

coincide con la presión de insonación (Recuérdese que se ha escogido $P_A = 5000 \text{ Pa}$.) y con la máxima amplitud del radio de la burbuja. Finalmente, transcurrido el tiempo de insonación, la presión tenderá a cero, lo que provoca que la burbuja vuelva a su forma original.

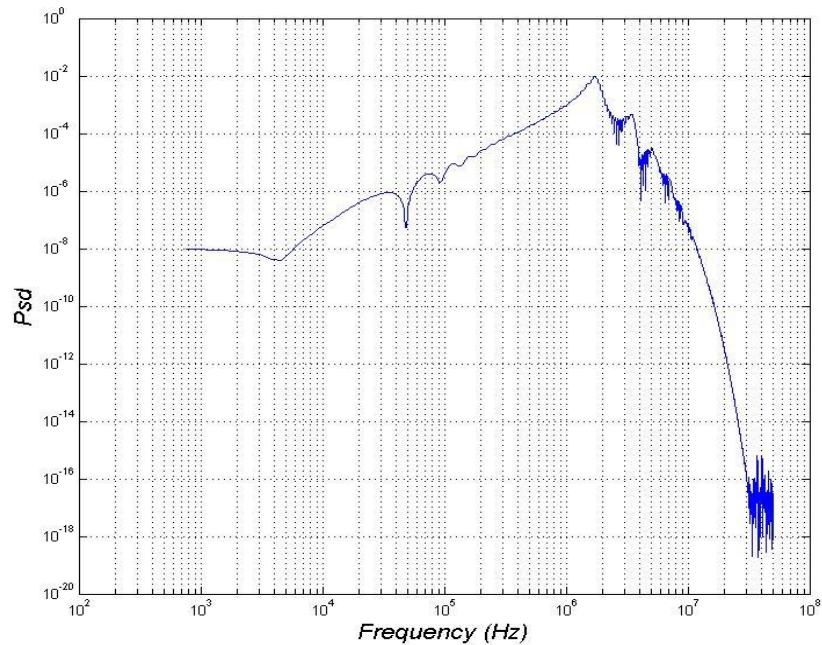


Figura 3.4: Espectro de la presión de la burbuja de 2 micras

El espectro de la presión es la representación gráfica de la transformada de Fourier de la presión aplicada a nuestra burbuja. El espectro muestra la respuesta de la burbuja ante diferentes frecuencias. De la visualización de esta gráfica, se puede comprobar que la mayor amplitud de la presión (que coincidía con la mayor amplitud del radio de la burbuja) se alcanza a una frecuencia aproximada a $f = 1 \text{ MHz}$. Esto tiene sentido, pues la mayor respuesta de la burbuja ante la onda acústica se produce a la frecuencia de resonancia de la burbuja, la cual ha sido definida anteriormente en los datos del problema a resolver,

Similar al estudio realizado a una presión de insonación de 5000 Pa, se analizará el comportamiento de la burbuja ante la acción de otros campos acústicos, concretamente a 10000 Pa y 20000 Pa. Si analizamos la contribución de una presión de insonación $P_A = 10000 \text{ Pa}$, se obtienen de forma gráfica los siguientes resultados:

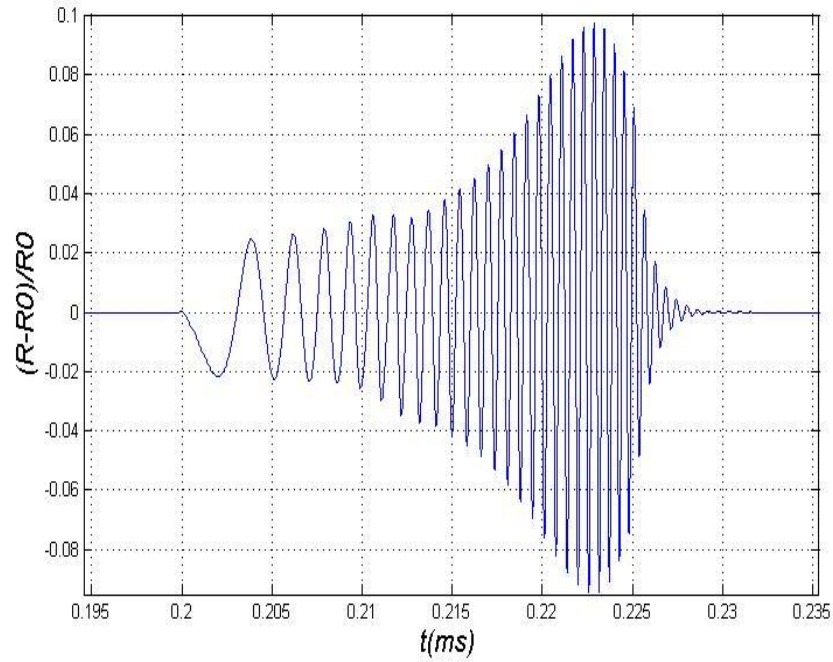


Figura 3.5: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis)

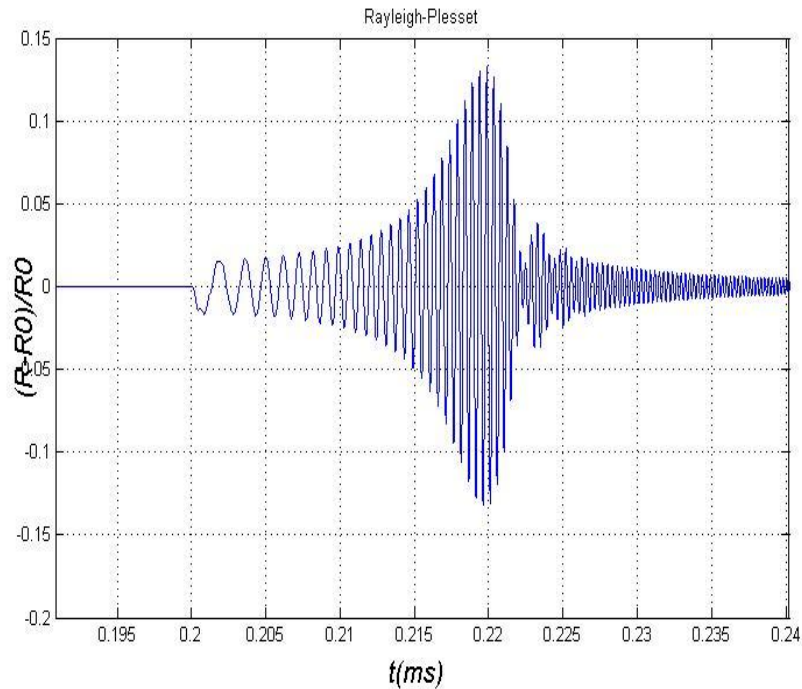


Figura 3.6: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (linealizada)

En este caso, las oscilaciones experimentadas por ambas burbujas tienen una amplitud máxima que supera un 13 % el tamaño original de la burbuja. Esta amplitud tan elevada, es consecuencia del efecto del ultrasonido al cual está sometido la burbuja. Al igual que en el caso anterior, el comportamiento de la burbuja ante ambas expresiones

matemáticas son similares entre sí, por lo que se puede concluir que ambas expresiones son correctas para poder describir el comportamiento de una burbuja.

A continuación, se analizará el efecto del ultrasonido en la burbuja:

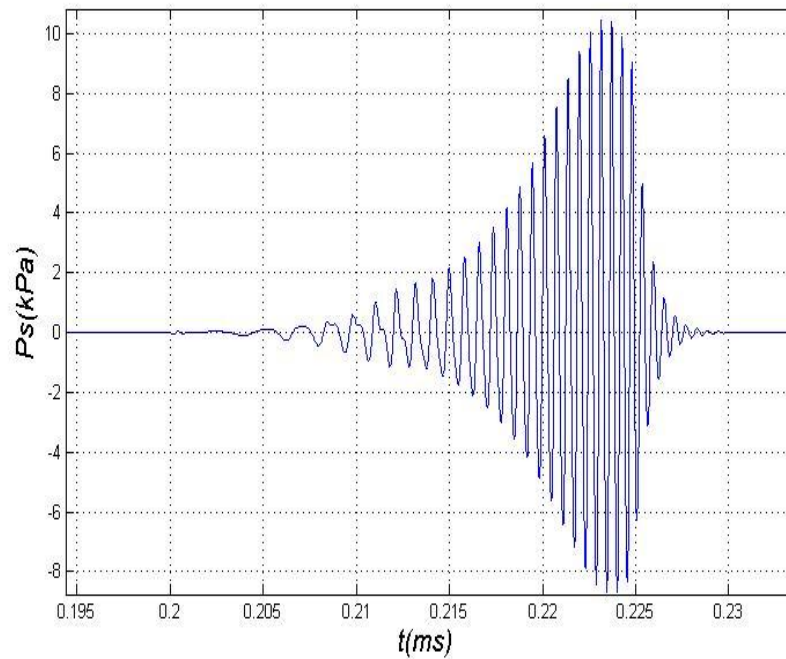


Figura 3.7: Evolución de la presión con respecto al tiempo

Al igual que comentábamos para el caso de 5000 Pa, la onda acústica generada sigue una onda sinusoidal, con una amplitud máxima de $P_A = 10000 \text{ Pa}$. Dicha amplitud máxima coincide con la mayor respuesta de la burbuja ante la aplicación del campo acústico. Una vez finalizado el proceso de insonación, la presión tenderá a cero y la burbuja volverá a su estado original.

En cuanto al espectro de la presión:

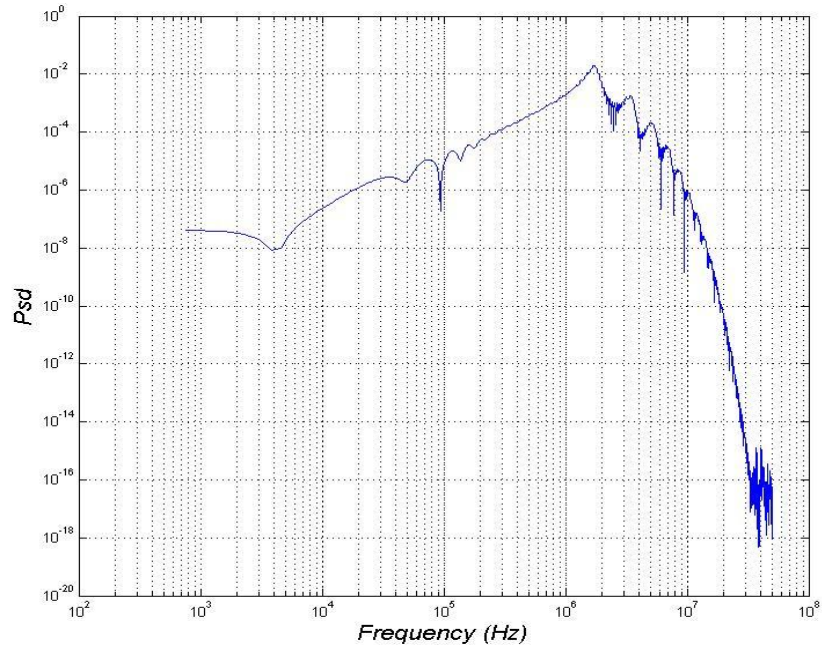


Figura 3.8: Espectro de la presión

Tras aplicar la transformada de Fourier a la presión, la cual estamos aplicando a nuestra burbuja, se visualiza la respuesta del comportamiento de la burbuja ante diferentes frecuencias. Se puede comprobar, que la mayor amplitud ocurre a la frecuencia de resonancia de la burbuja, que es igual a $f = 1 \text{ MHz}$.

Finalmente, y como se realizó en los casos anteriores, se analizará el comportamiento de la burbuja ante una presión acústica $P_A = 20000 \text{ Pa}$. El objetivo es comprobar como varía finalmente ante una onda acústica más potente.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

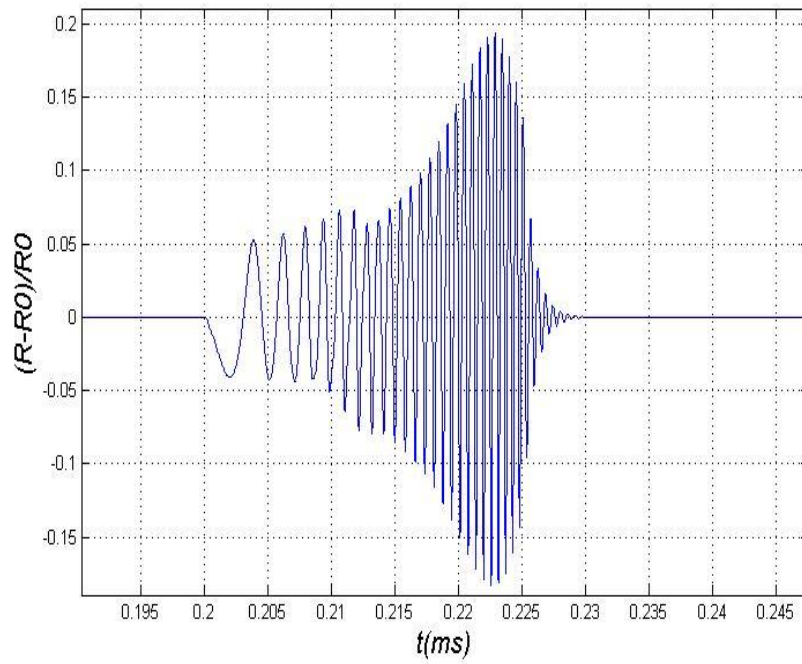


Figura 3.9: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis)

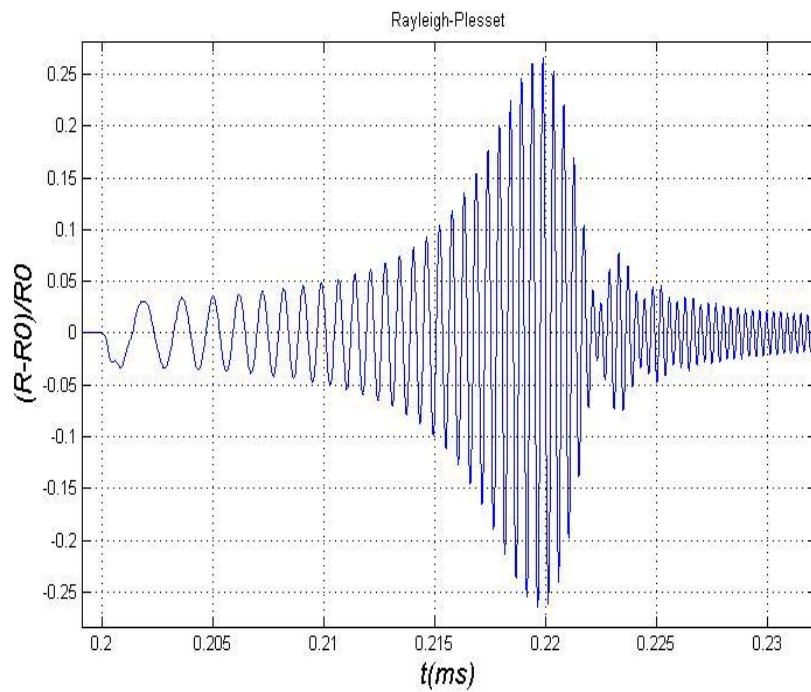


Figura 3.10: Evolución de la burbuja de 2 micras con respecto al tiempo (linealizada)

A partir de los resultados obtenidos, se puede verificar que el efecto del ultrasonido es más potente, dado que obtenemos unos picos en la amplitud superiores al 25%. Podemos comprobar que se obtienen unos resultados similares, por lo que podemos

concluir que el método utilizado es correcto.

Finalmente, estudiamos el efecto del ultrasonido mediante un gráfico que determine la variación de la presión a lo largo del tiempo, y su respuesta mediante un análisis de Fourier:

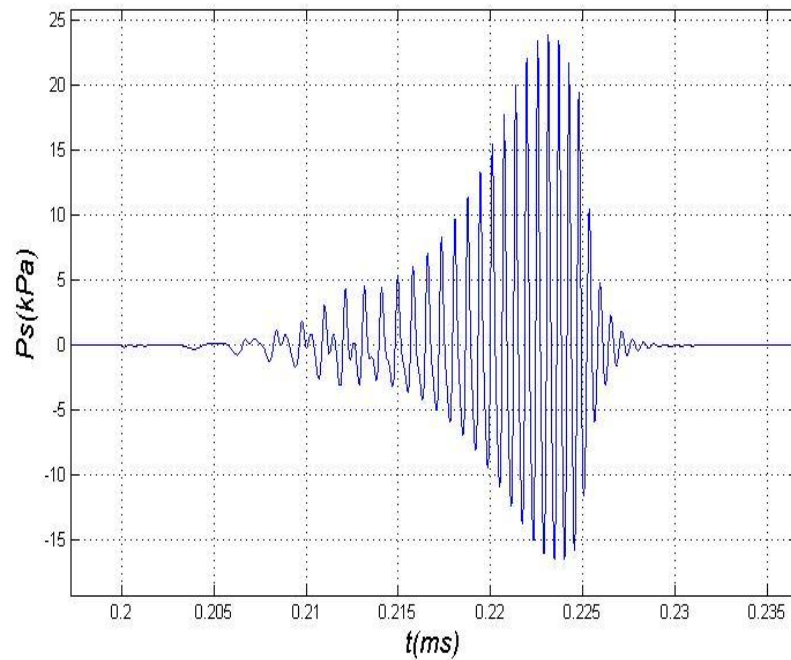


Figura 3.11: Evolución de la presión con respecto al tiempo

A partir de los resultados obtenidos de la presión aplicada con respecto al tiempo, comprobamos, de nuevo, que la onda acústica es la causa de la oscilación de la burbuja. La mayor amplitud en la presión aplicada coincide con la mayor amplitud del radio de la burbuja. En este caso, la amplitud de la onda acústica es superior a la generada, que era de $P_A = 20000 \text{ Pa}$.

Finalmente el espectro de la presión se representa como:

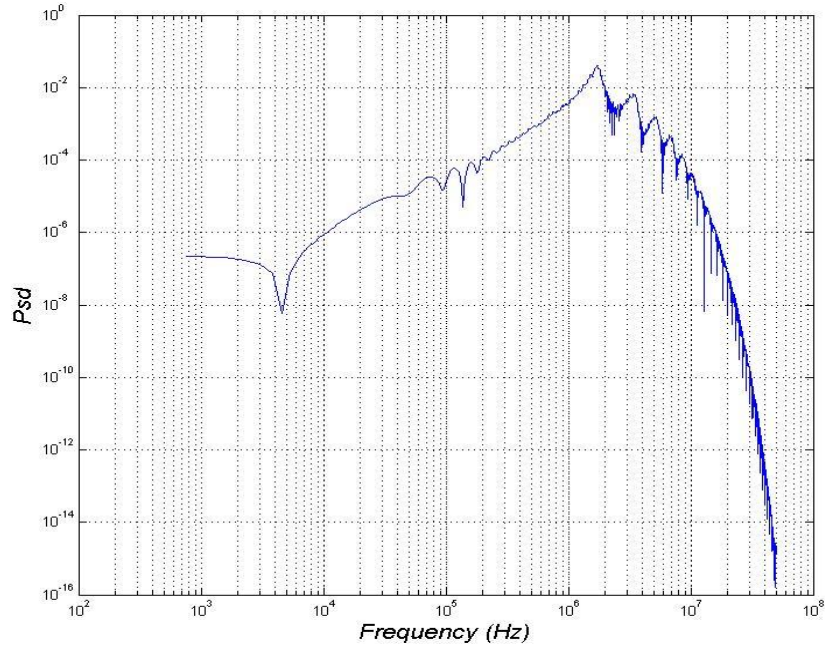


Figura 3.12: Espectro de la presión

En este caso, la representación de la evolución de la burbuja ante distintas frecuencias tiene su mayor pico cercano a $f = 1 \text{ MHz}$, que es la frecuencia central de la burbuja. El resultado obtenido es el esperado.

3.2 ANÁLISIS DE BURBUJAS DE TAMAÑOS MAYORES

Una vez analizada la burbuja de radio $R_0 = 2 \mu m$, nuestro objeto de estudio es realizar un análisis similar con burbujas de tamaño más grandes. La principal meta a conseguir es la comprobación de la precisión de los dos métodos utilizados. Además, se quiere visualizar la respuesta de burbujas más grandes ante una onda acústica.

Primeramente, se analizará una burbuja de radio $R_0 = 5 \mu m$. Las propiedades de la burbuja y del entorno líquido que la rodea serán constantes e iguales al problema anterior. En este caso, los datos introducidos han sido:

$$R_0 = 5 \mu m$$

$$f_c = 0.4 \text{ MHz}$$

$$BW = 0.76 \text{ MHz}$$

$$p_0 = 101325 \text{ Pa}$$

$$PL = 1 * 10^{-3} s$$

$$DC = 25$$

$$t = 2 * 10^{-3} s$$

$$t_o = 2 * 10^{-4}$$

En este caso, el factor de amortiguamiento obtenido numéricamente para la solución linealizada es $\beta = 0.0942$. Dado que el factor de amortiguamiento es menor que para el caso de la burbuja de radio $R_0 = 2 \mu m$, se espera que, en las soluciones gráficas de la ecuación linealizada, la burbuja oscile durante un tiempo mayor.

Los resultados obtenidos para esta burbuja han sido:

BURBUJA DE 5 MICRAS y 5000 PA

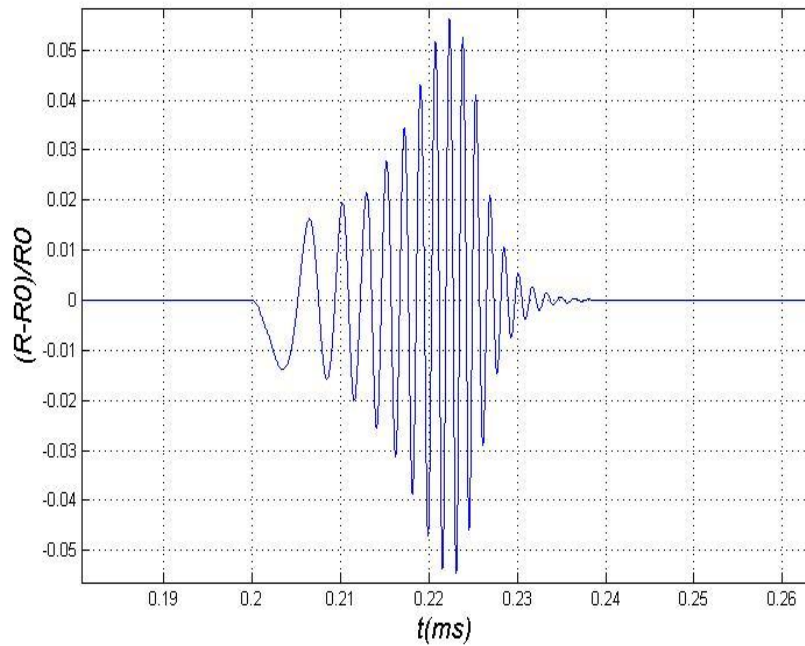


Figura 3.13: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis)

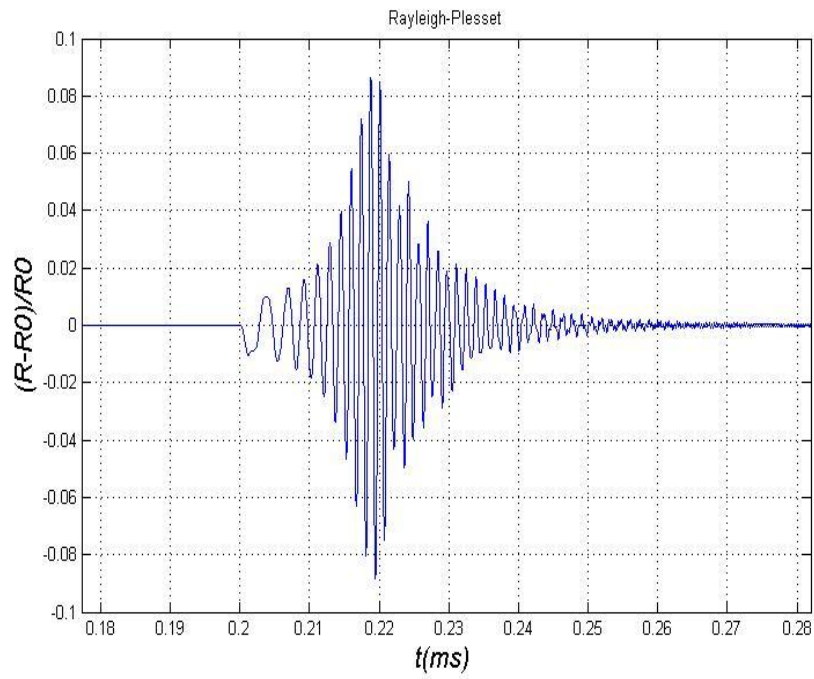


Figura 3.14: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (linealizada)

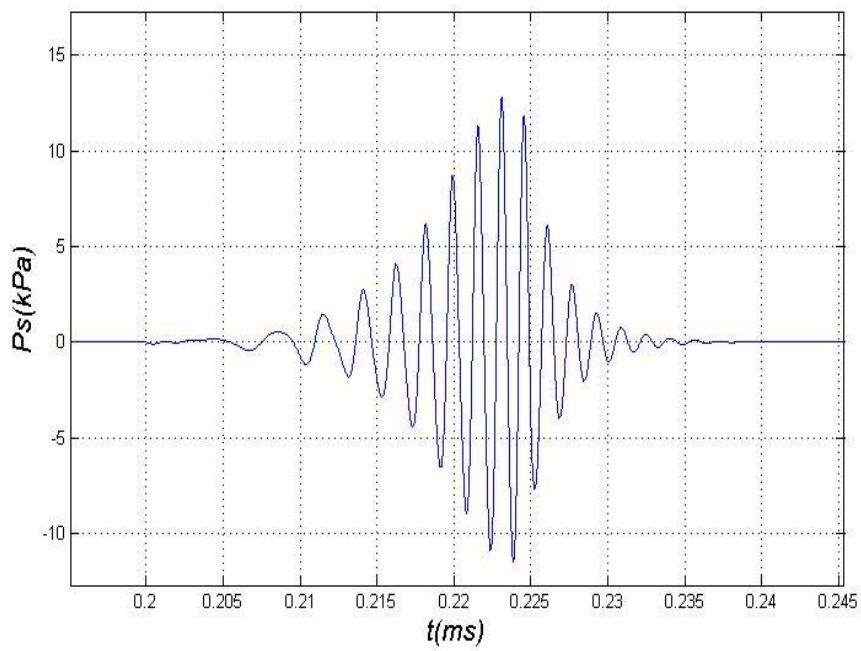


Figura 3.15: Evolución de la presión con respecto al tiempo

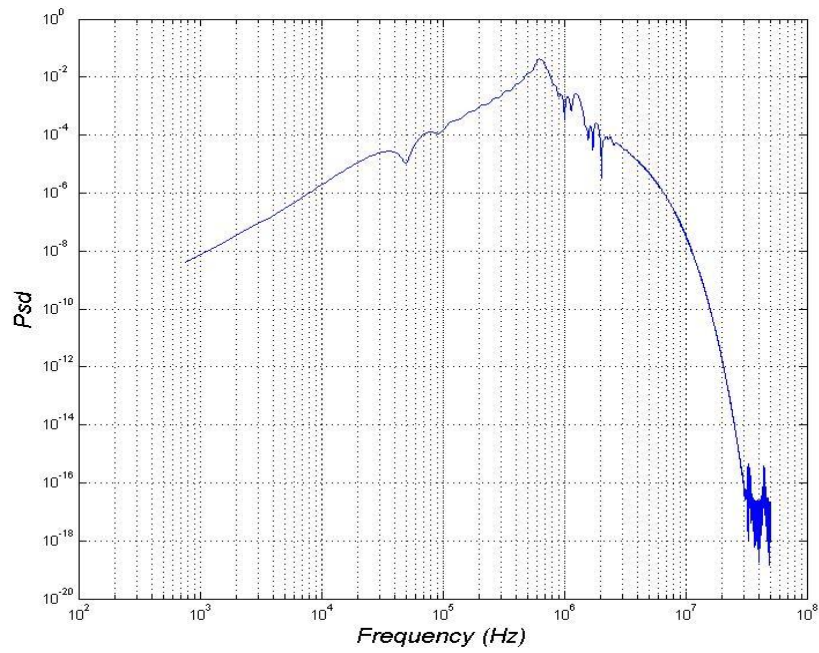


Figura 3.16: Espectro de la presión

BURBUJA DE 5 MICRAS y 10000 PA

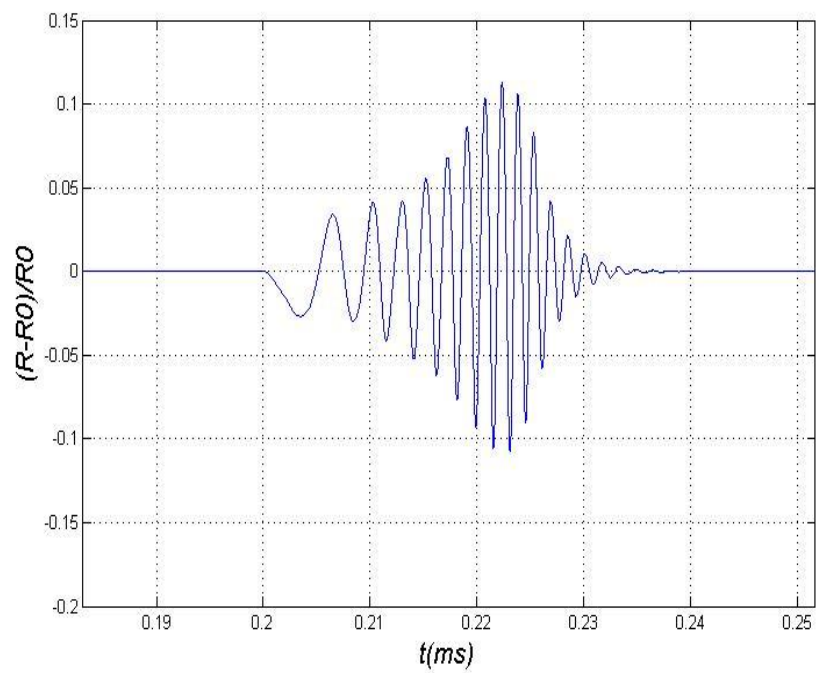


Figura 3.17: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis)

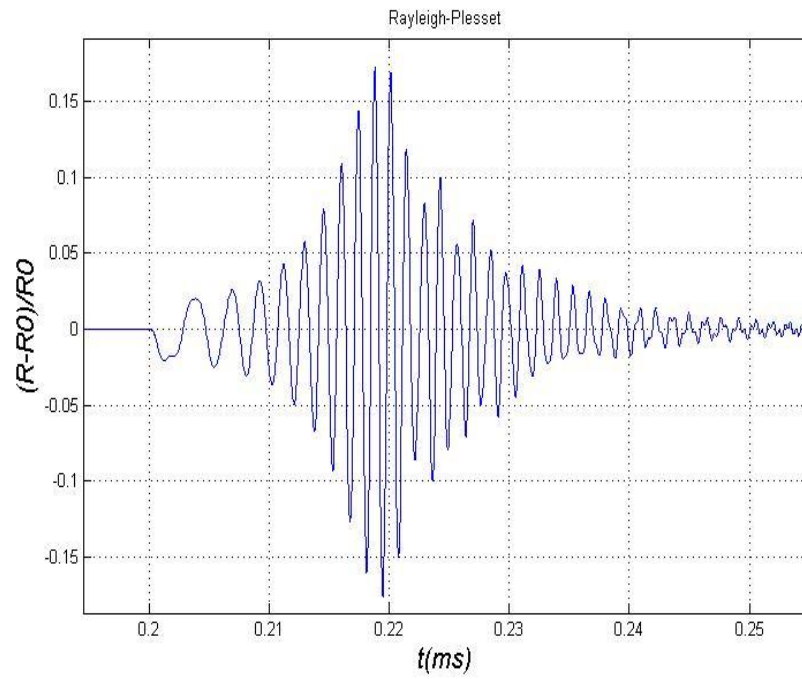


Figura 3.18: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (linealizada)

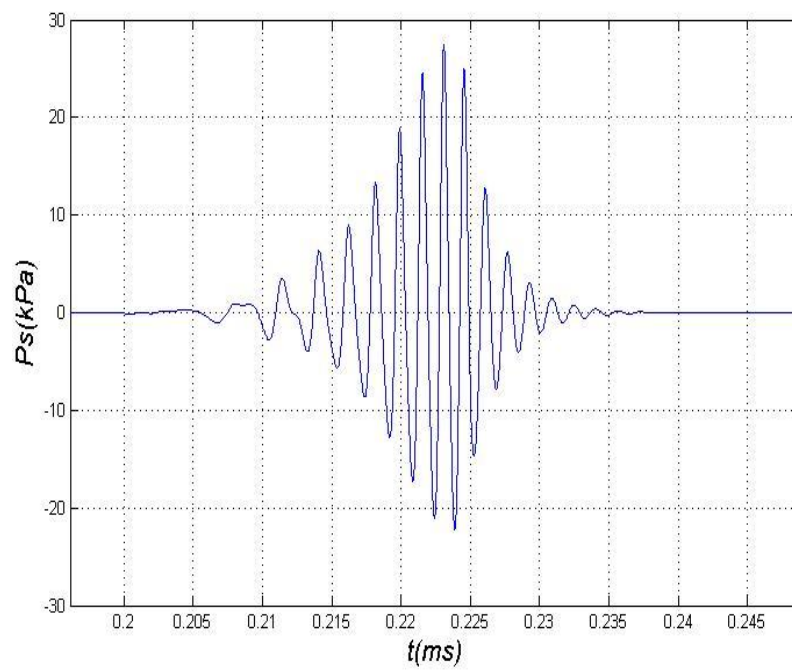


Figura 3.19: Evolución de la presión con respecto al tiempo

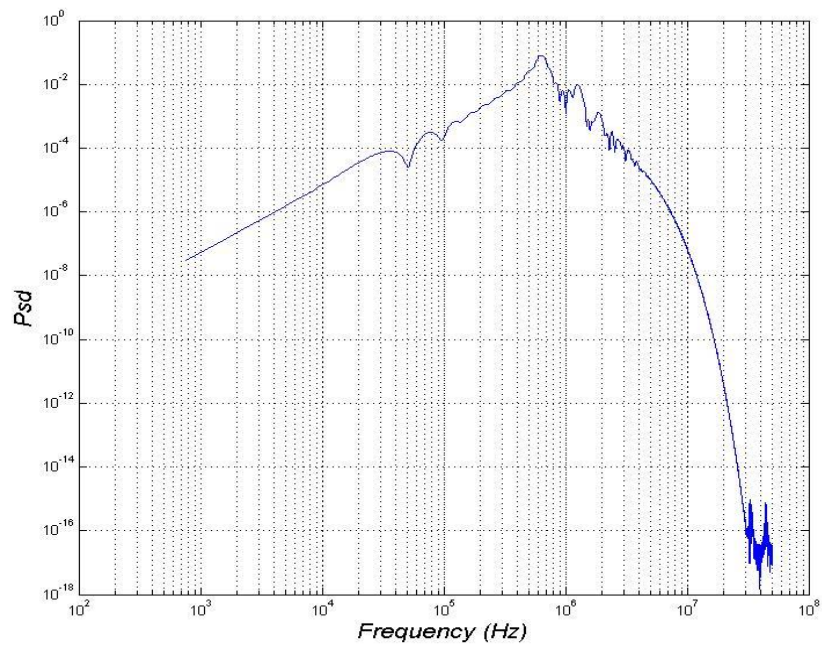


Figura 3.20: Espectro de la presión

BURBUJA DE 5 MICRAS v 20000 PA

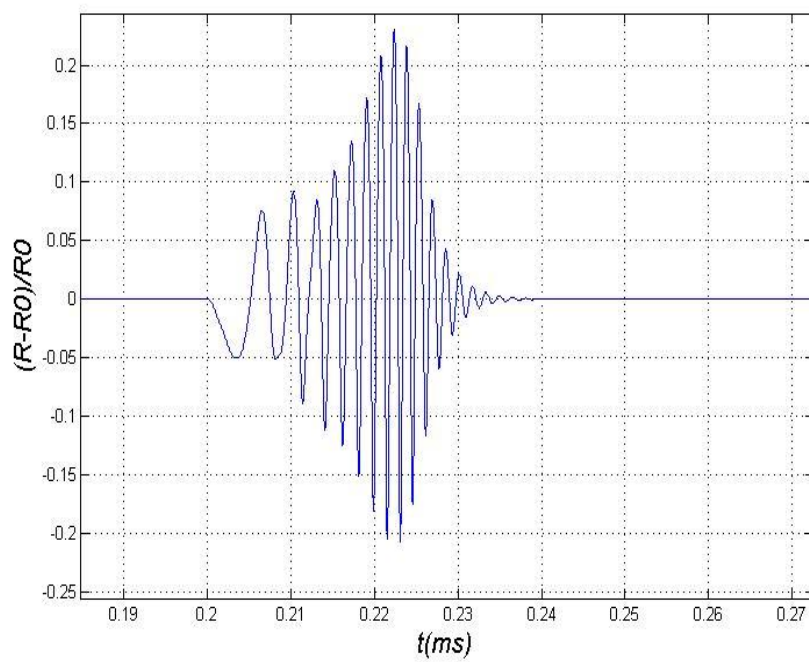


Figura 3.21: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis)

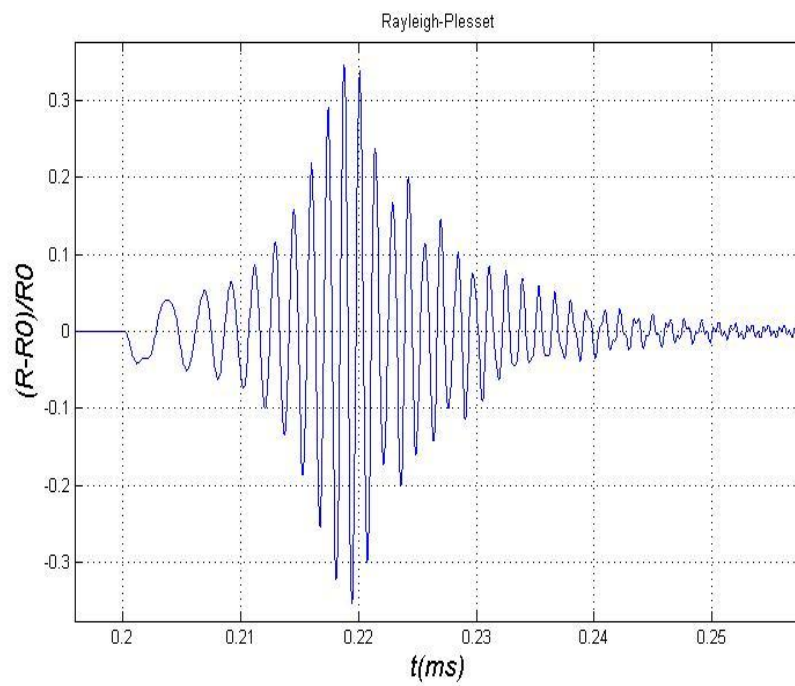


Figura 3.22: Evolución de la burbuja de 5 micras con respecto al tiempo (linealizada)

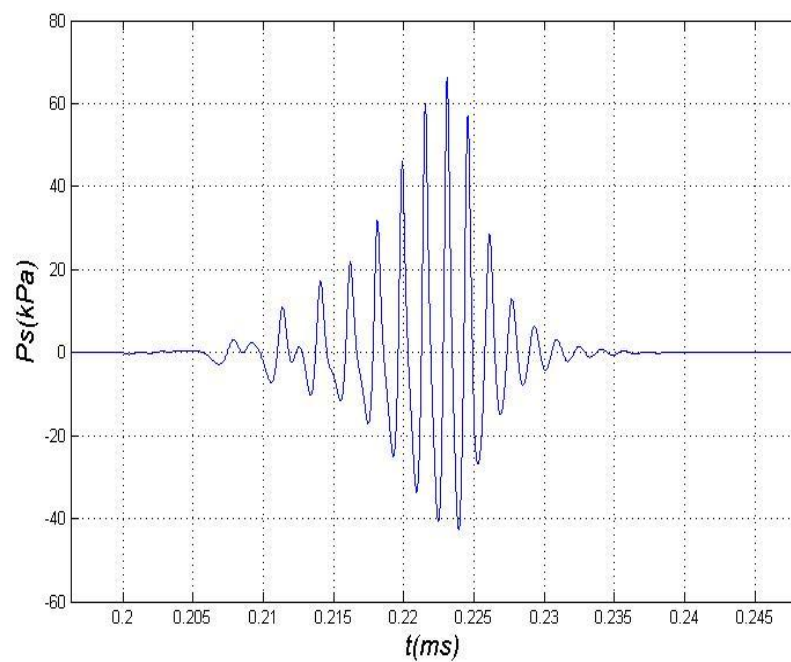


Figura 3.23: Evolución de la presión con respecto al tiempo

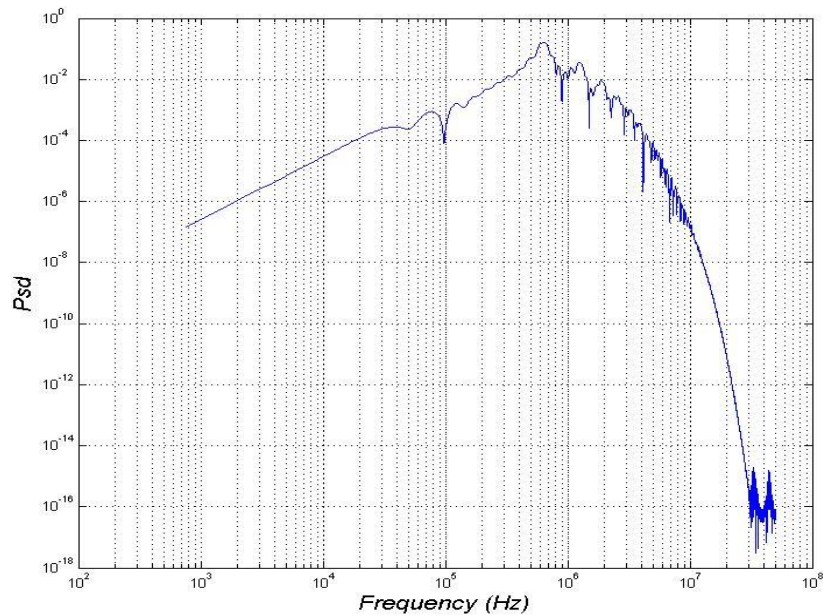


Figura 3.24: Espectro de la presión

En vista de los resultados obtenidos para distintos campos acústicos, podemos apreciar que:

- En la representación de la variación de la burbuja con respecto al radio inicial a lo largo del tiempo, podemos comprobar que las soluciones de Keller-Miksis y de Keller-Miksis linealizada son semejantes entre sí, si bien hay ligeras variaciones en las amplitudes alcanzadas. Se aprecian variaciones del radio de la burbuja con respecto al inicial de hasta un 30 %, aplicando una onda acústica de 20000 Pa. Pasado el tiempo de insonación, la burbuja deja de oscilar con movimientos de expansión y compresión y vuelve a su tamaño inicial.
- La presión aplicada a la burbuja sigue una onda sinusoidal. La mayor amplitud en la onda acústica coincide con la mayor respuesta de la burbuja ante la acción de dicho campo. Ésta va aumentando, según aumentemos la amplitud de la onda acústica.
- La respuesta de la burbuja ante distintas frecuencias, representada mediante una transformada de Fourier discreta, demuestra que la mayor amplitud se alcanza a la frecuencia central de la burbuja, que en este caso era $f = 400 \text{ MHz}$

BURBUJA DE 10 MICRAS y 5000 PA

Similar al análisis realizado con las anteriores burbujas, se realizará un estudio para una

microburbuja de radio $R_0 = 10 \mu m$. Los datos de partida que se utilizarán para realizar el estudio numérico, son:

$$R_0 = 10 \mu m$$

$$f_c = 0.3 MHz$$

$$BW = 0.57 MHz$$

$$p_0 = 101325 Pa$$

$$PL = 1 * 10^{-3} s$$

$$DC = 25$$

$$t = 2 * 10^{-3} s$$

$$t_o = 2 * 10^{-4}$$

Asimismo, se ha obtenido en este estudio un factor de amortiguamiento $\beta = 0.0395$. Este valor es muy bajo, según lo comentado anteriormente (Recuérdese que los valores óptimos del factor de amortiguamiento deben estar entre 0.1 y 1), por lo que se espera que la burbuja oscile durante más tiempo en el análisis del comportamiento de la burbuja. Una vez definidos los datos de partida, se presentarán los resultados obtenidos:

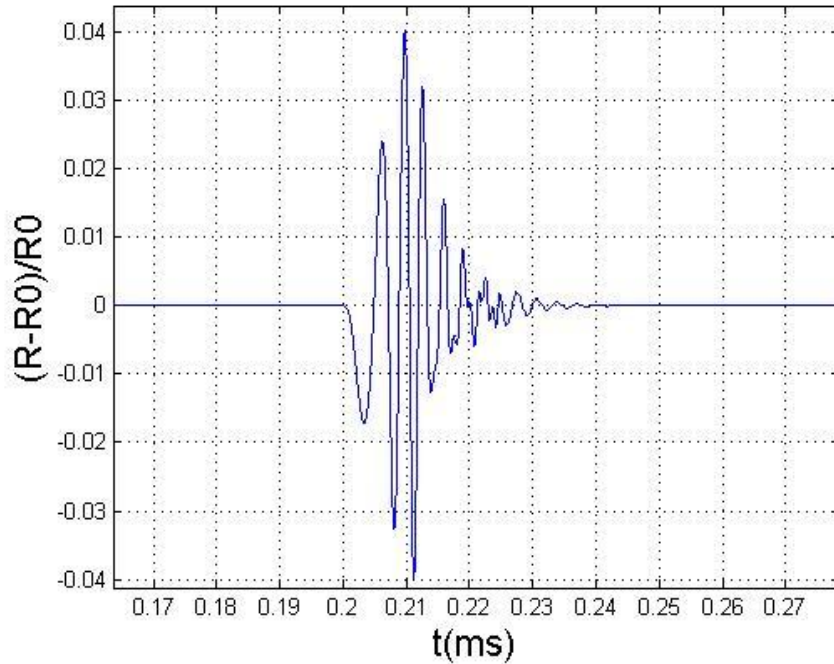


Figura 3.25: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis)

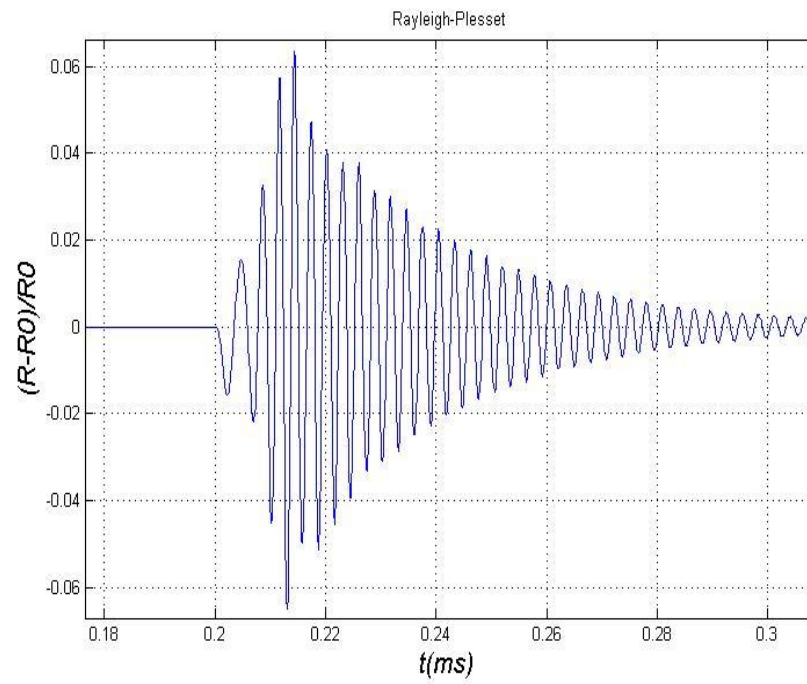


Figura 3.26: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (linealizada)

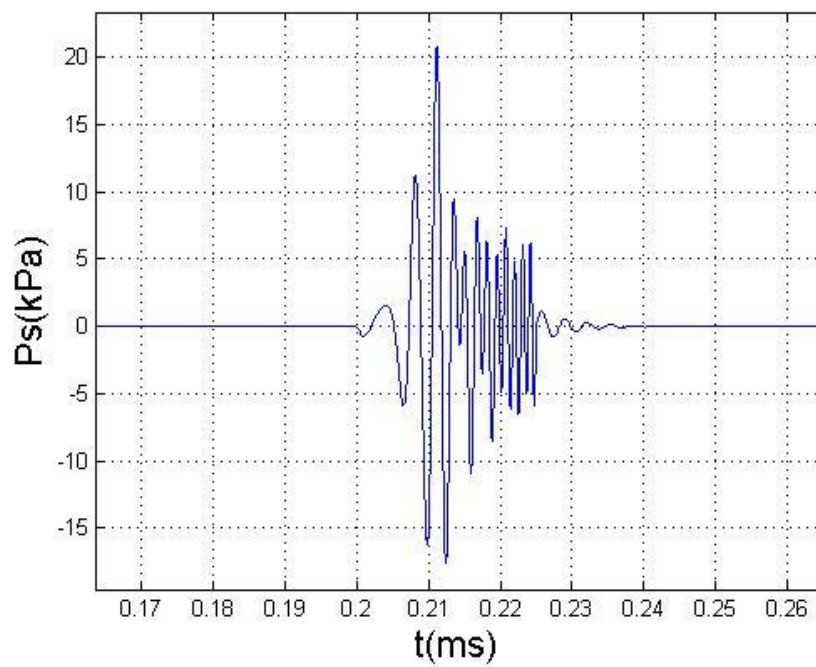


Figura 3.27: Evolución de la presión con respecto al tiempo

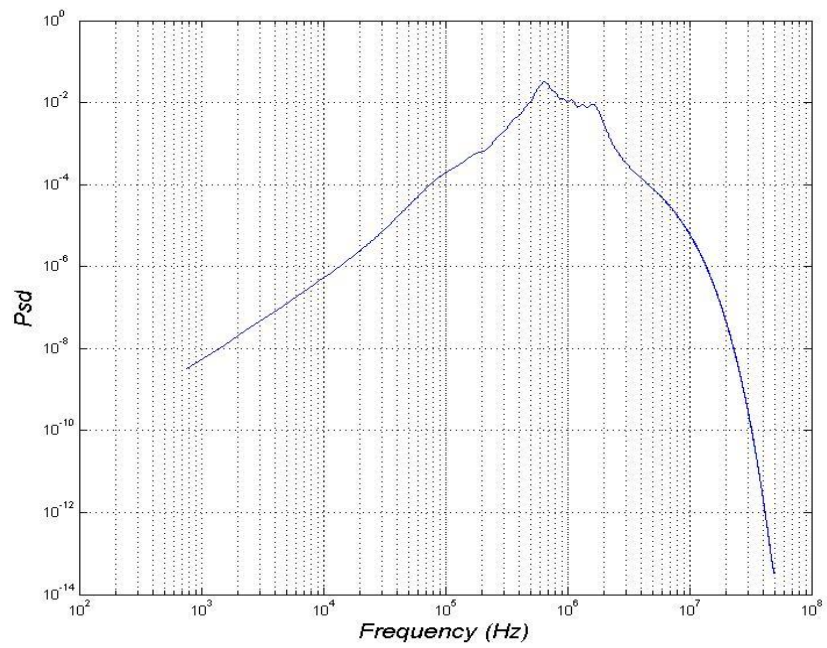


Figura 3.28: Espectro de la presión

BURBUJA DE 10 MICRAS y 10000 PA

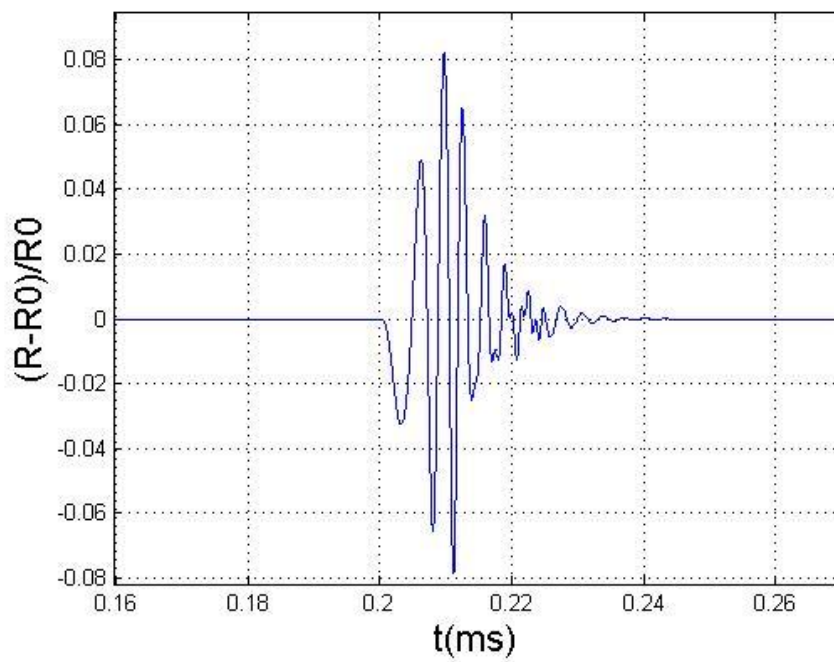


Figura 3.29: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis)

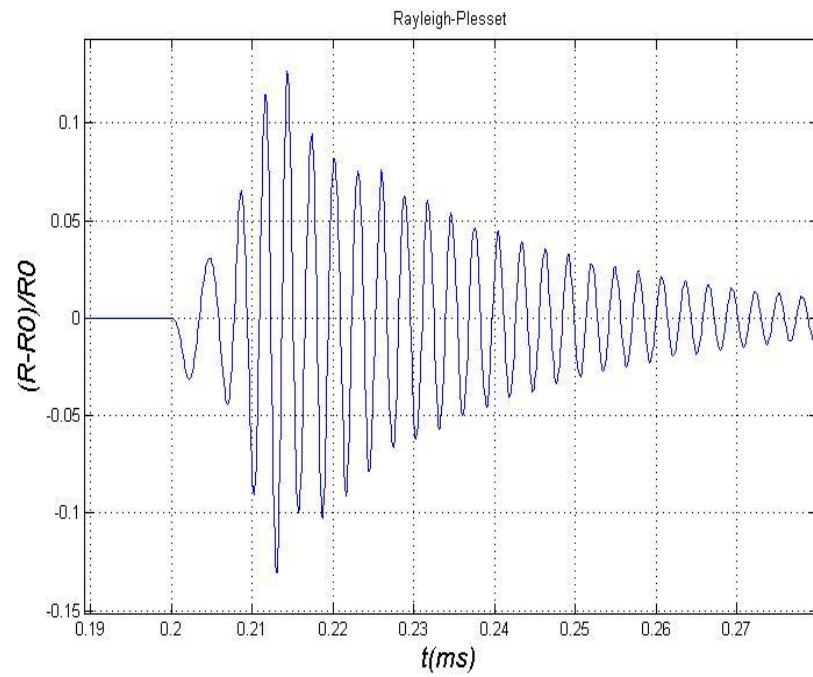


Figura 3.30: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (linealizada)

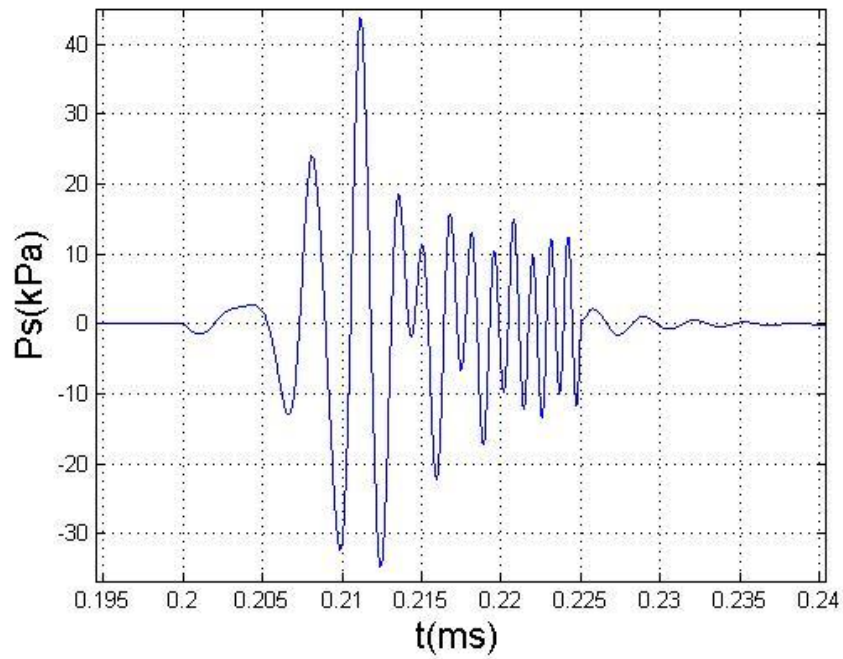


Figura 3.31: Evolución de la presión con respecto al tiempo

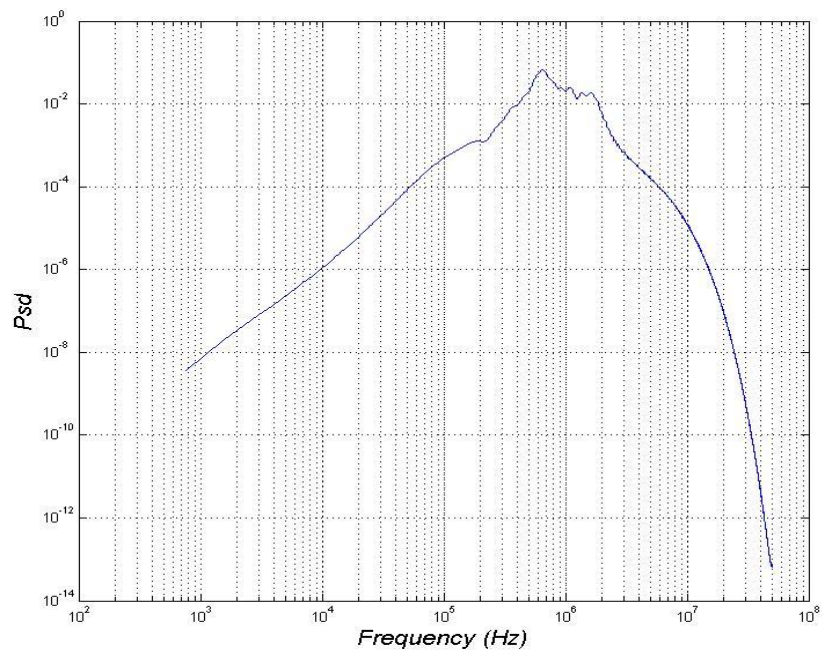


Figura 3.32: Espectro de la presión

BURBUJA DE 10 MICRAS y 20000 PA

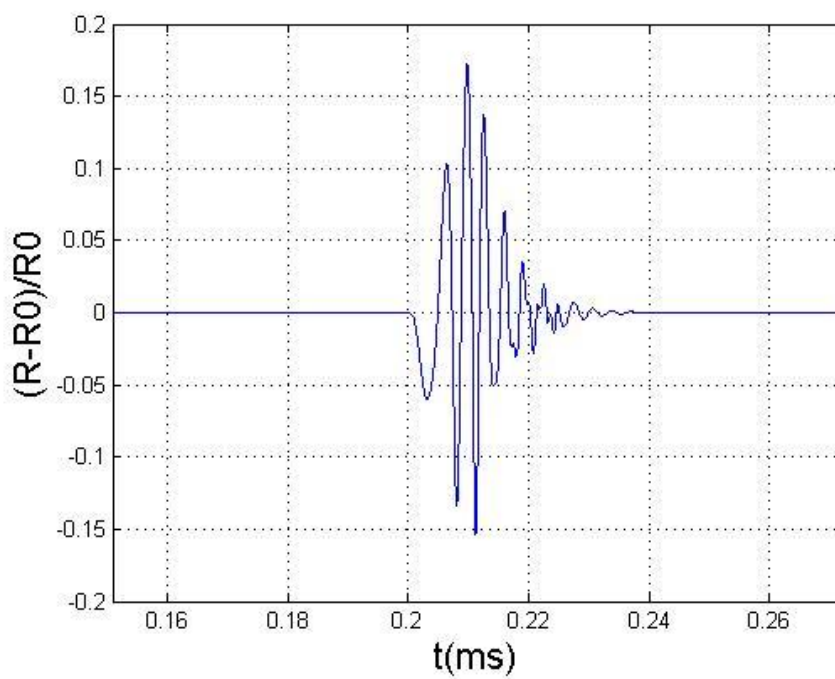


Figura 3.33: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (Keller-Miksis)

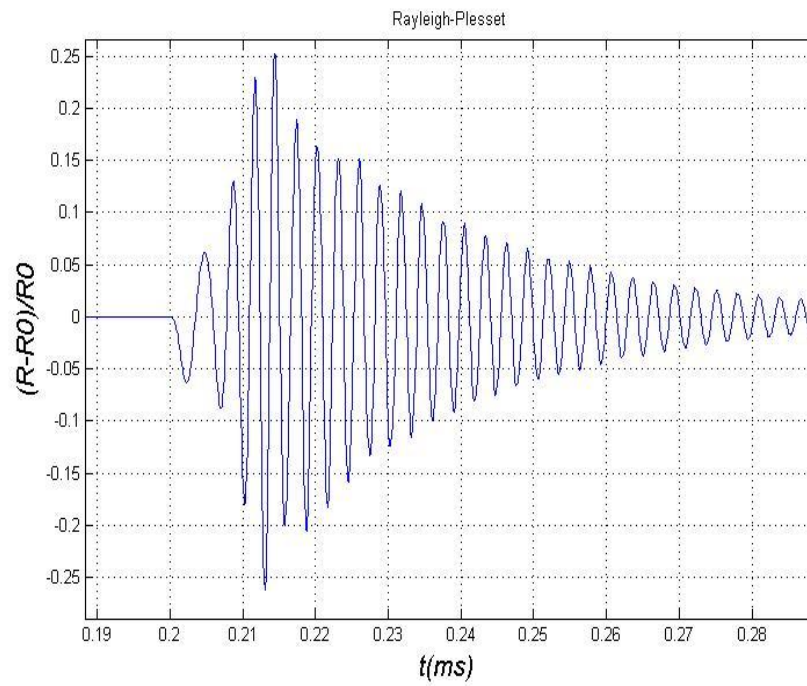


Figura 3.34: Evolución de la burbuja de 10 micras con respecto al tiempo (linealizada)

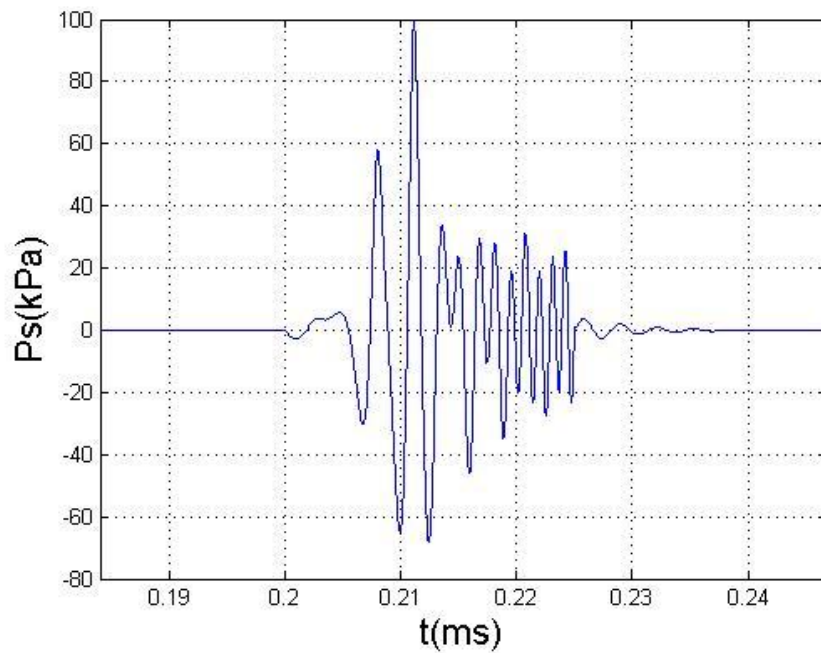


Figura 3.35: Evolución de la presión con respecto al tiempo

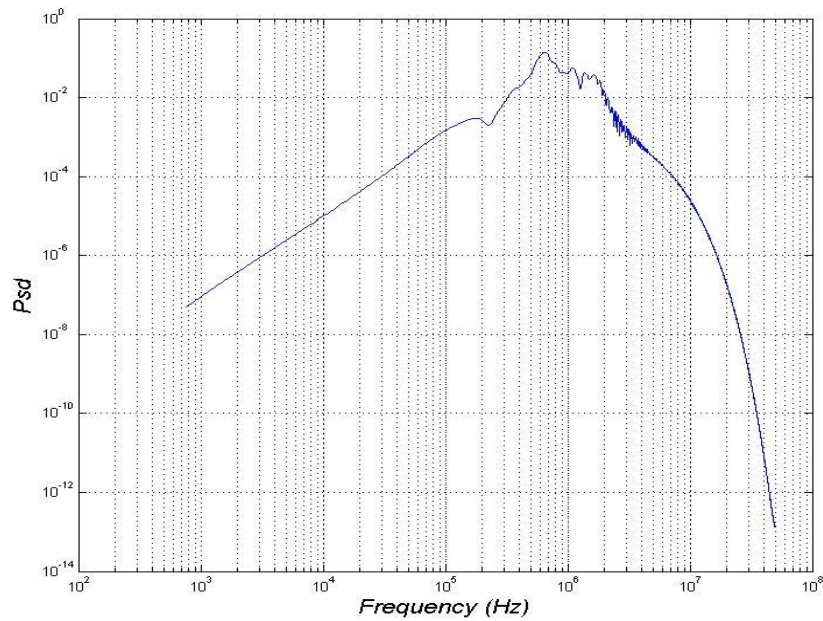


Figura 3.36: Espectro de la presión

Una vez realizado el estudio numérico del problema, se puede concluir lo siguiente:

- Los resultados referentes a la variación del radio de la burbuja con respecto al radio inicial a lo largo del tiempo, demuestran que se alcanzan similares picos en las amplitudes para diferentes ondas acústicas. Los resultados obtenidos demuestran que se alcanzan variaciones del radio de la burbuja con respecto al inicial de hasta el 22% para la mayor amplitud de la onda acústica. Este resultado en la amplitud es menor que en los dos casos anteriormente estudiados, debido a que el radio de la burbuja es mayor, por lo que su tamaño no varía tanto.

Tal y como se puede comprobar de la visualización de las diferentes gráficas, en la ecuación de Keller-Miksis la onda alcanza el equilibrio pasado el periodo de integración. Sin embargo, en la ecuación linealizada, la burbuja sigue oscilando en ese tiempo. El motivo es que el factor de amortiguamiento obtenido en la resolución de la ecuación linealizada es tan bajo, que impide que la burbuja alcance el reposo en el mismo tiempo que el obtenido por Keller-Miksis. No se han podido obtener factores de amortiguamiento mayores mediante Matlab, por lo que existe un fallo que no se ha podido subsanar.

- La onda acústica es la responsable de la variación de las oscilaciones de la burbuja. En este caso, es necesario generar mayores presiones para poder apreciar un cambio apreciable en el tamaño de la burbuja. La mayor amplitud de la presión se alcanza a $P_A = 20000 \text{ Pa}$, obteniendo un valor de 100 Kpa.

Transcurrido el periodo de insonación, la burbuja vuelve a su tamaño inicial.

- La transformada de Fourier aplicada a la evolución de la burbuja con el tiempo, demuestra que el mayor pico en la amplitud de la burbuja se alcanza a la frecuencia central de la misma, que es igual a $f = 300 \text{ MHz}$.

Este estudio nos ha permitido analizar la evolución de tres tipos de burbuja diferente ante distintos campos acústicos. En conclusión, se puede asegurar que a medida que aumentamos el tamaño de la burbuja a estudiar, la respuesta obtenida en el tiempo alcanza menores amplitudes. Esto es lógico, pues a medida que aumentamos el tamaño de la burbuja, ésta se vuelve más estable ante variaciones de la presión, por lo que oscila menos

3.3 ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LA BURBUJA ANTE DISTINTOS AMBIENTES

En este apartado se estudiará cómo evoluciona nuestro espectro de presiones en distintos ambientes, es decir, como varía la forma de la burbuja ante la acción de distintos ambientes. Se analizarán de forma gráfica los resultados obtenidos. Sin embargo, esta vez, y para simplificar el cálculo, se escogerá una burbuja de $R_0 = 2 \mu\text{m}$ y un campo acústico de presión $P_A = 5 \text{ kPa}$. Se analizará la evolución para las siguientes presiones ambiente: 70, 90, 120 y 140 mm Hg.

Los resultados obtenidos para los distintos ambientes son:

PRESIÓN AMBIENTE $p_0 = 70 \text{ mm Hg}$

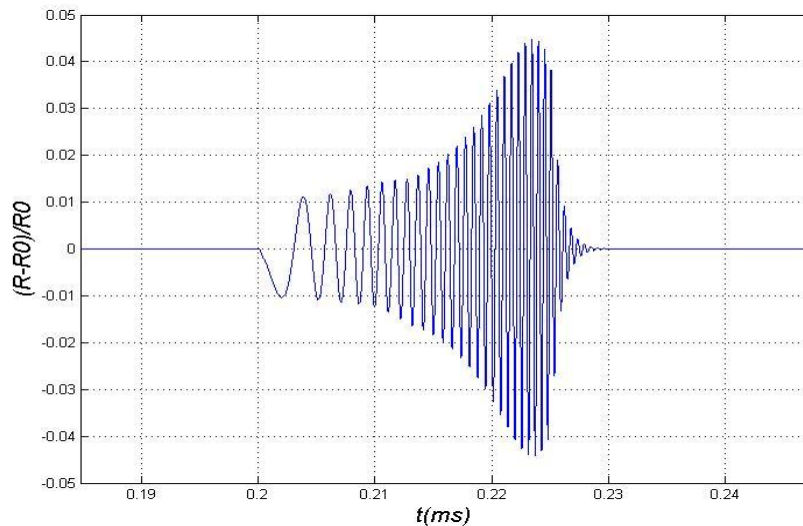


Figura 3.37: Evolución de la burbuja en un ambiente de $p_0 = 70 \text{ mm Hg}$

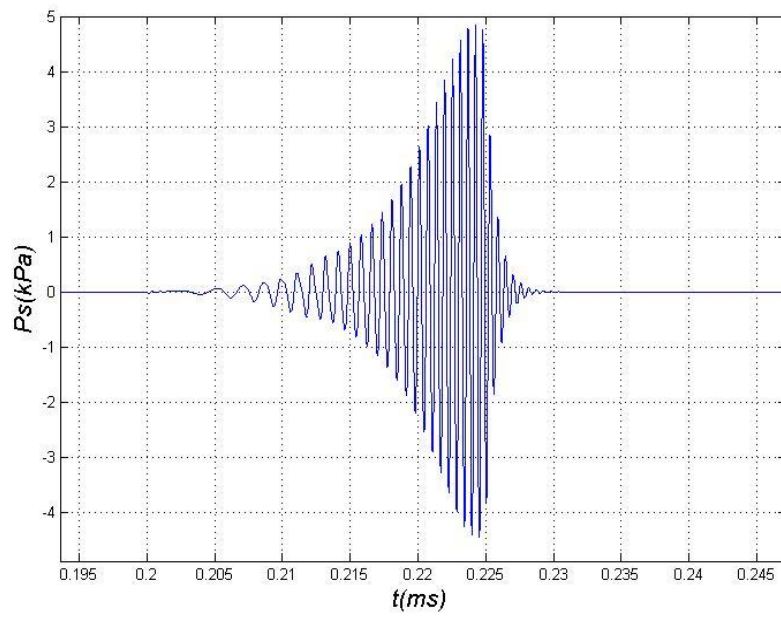


Figura 3.38: Evolución de la presión aplicada en un ambiente $p_0 = 70 \text{ mm Hg}$

PRESIÓN AMBIENTE $p_0 = 90 \text{ mm Hg}$

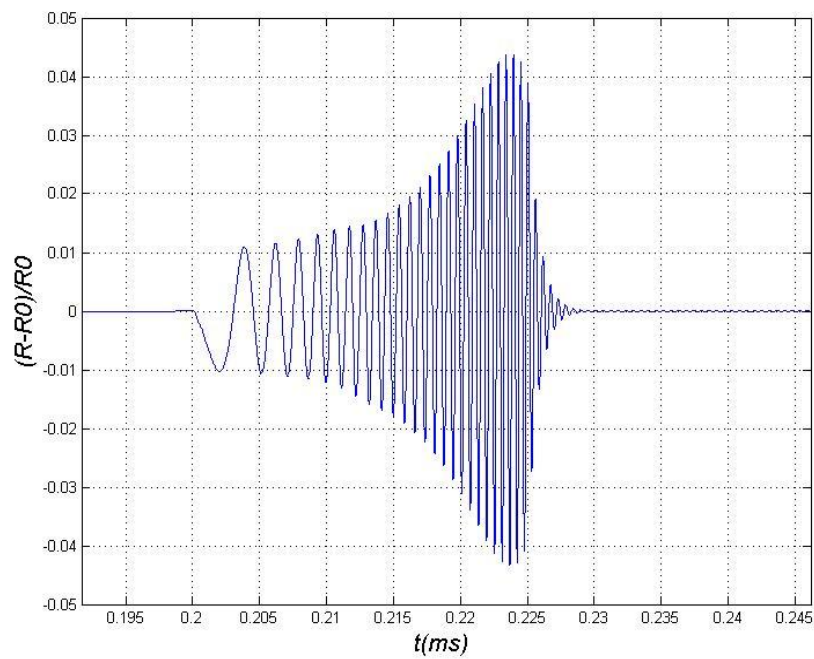


Figura 3.39: Evolución de la burbuja en un ambiente de $p_0 = 90 \text{ mm Hg}$

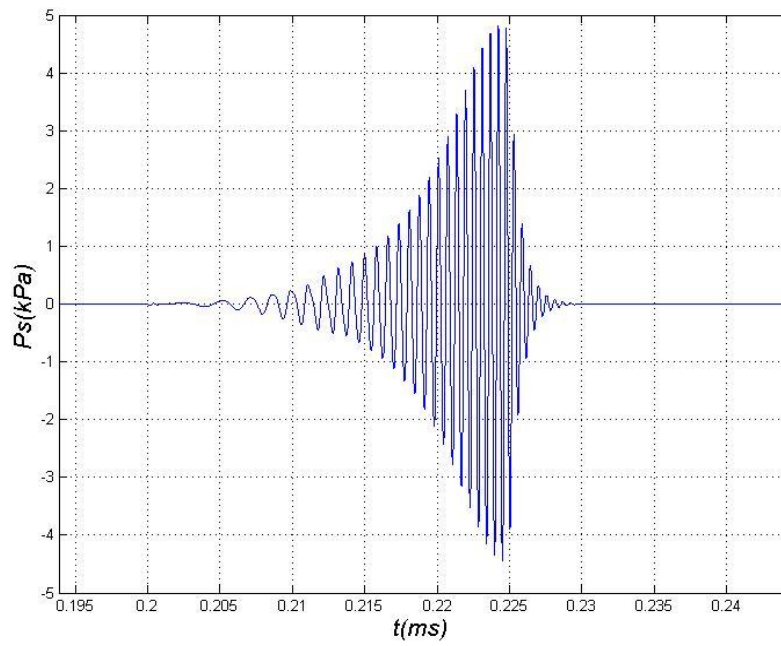


Figura 3.40: Evolución de la presión aplicada en un ambiente $p_0 = 90 \text{ mm Hg}$

PRESIÓN AMBIENTE $p_0 = 120 \text{ mm Hg}$

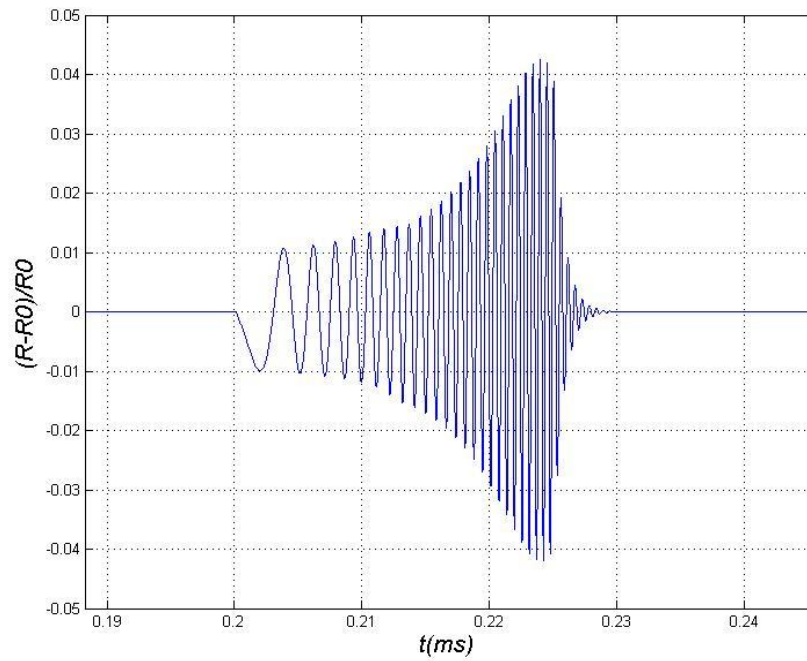


Figura 3.41: Evolución de la burbuja en un ambiente de $p_0 = 120 \text{ mm Hg}$

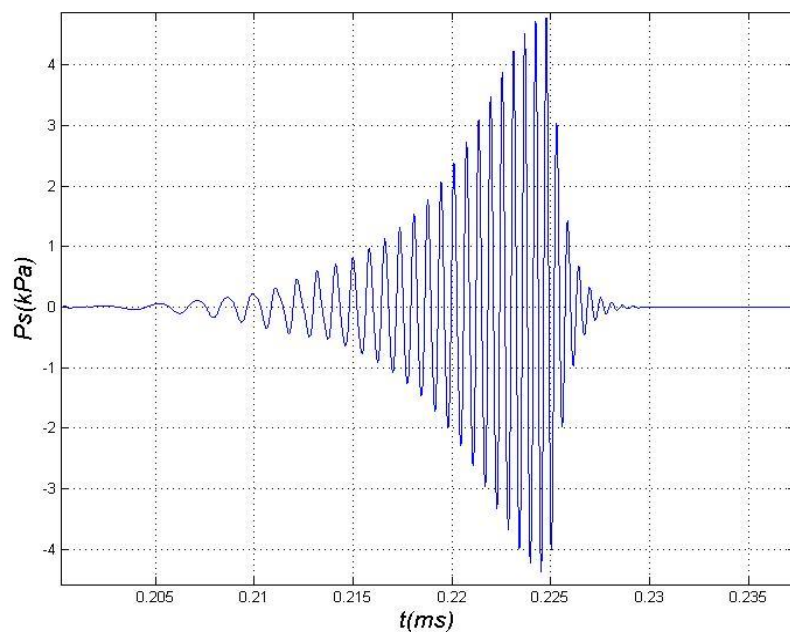


Figura 3.42: Evolución de la presión aplicada en un ambiente $p_0 = 120$ mm Hg

PRESIÓN AMBIENTE $p_0 = 140$ mm Hg

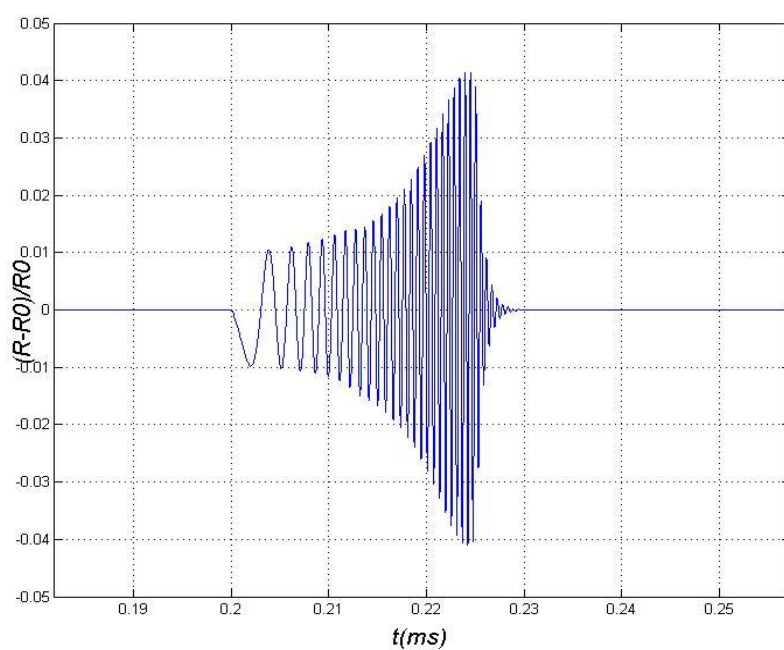


Figura 3.43: Evolución de la burbuja en un ambiente de $p_0 = 140$ mm Hg

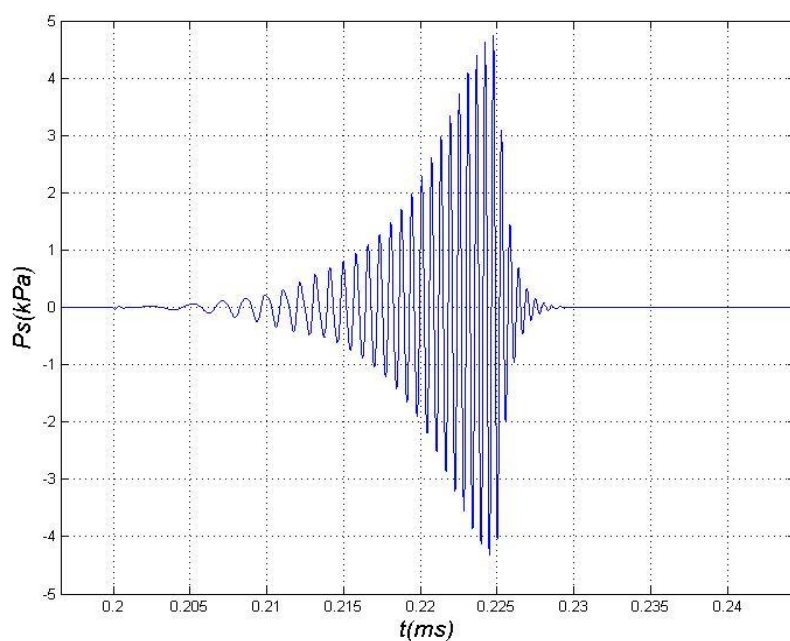


Figura 3.44: Evolución de la presión aplicada en un ambiente $p_0 = 120 \text{ mm Hg}$

Finalmente, si pintamos el espectro de todas las presiones de los distintos ambientes a los que hemos sometido nuestra burbuja, obtenemos la siguiente gráfica:

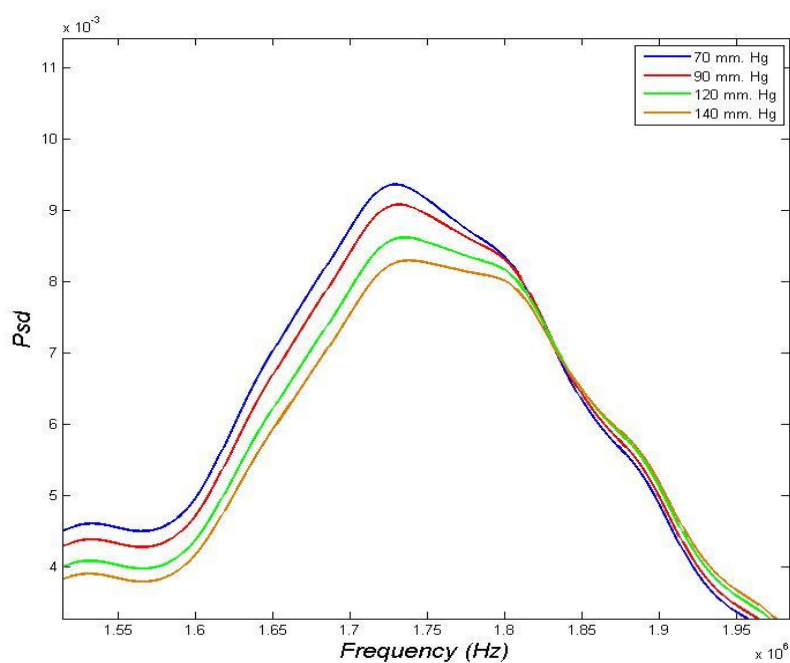


Figura 3.45 :Espectro de las presiones ambientales

Una vez realizados los cálculos precisos y las gráficas, anteriormente adjuntas, las conclusiones obtenidas son:

- La variación del radio de la burbuja con respecto al radio original a lo largo del tiempo, alcanza menores picos en la amplitud de sus oscilaciones, a medida que aumentamos la presión ambiente que rodea a la microburbuja. Este aumento de la presión ambiente impide, en mayor medida, la libre oscilación de las burbujas, que tienen que aplicar una fuerza mayor para vencer dicha presión.
- Consecuencia del aumento de la presión ambiente, los picos en la amplitud de la presión de insonación son menores, tal y como reflejan las gráficas. Al igual que sucede en el comportamiento de la burbuja, a medida que aumenta la presión ambiente, mayor es la presión que se deberá aplicar a la burbuja para poder vencer la presión del líquido.
- Finalmente, en las gráficas referentes al espectro de la presión, en la cual se describe el comportamiento de la burbuja ante distintas frecuencias, se puede visualizar que a medida que aumenta la presión ambiente, menor es la respuesta en amplitud de la presión a la frecuencia de resonancia de la burbuja. De la visualización de la gráfica del espectro, podemos visualizar además, que apenas hay variación en la frecuencia de resonancia de la burbuja ante las distintas presiones ambiente. Esto es así, ya que se ha estudiado el problema para un tamaño de burbuja muy pequeño. En el caso de que el tamaño de la burbuja hubiera sido mayor, las diferencias hubieran sido más notables.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS ECONÓMICO DEL PROYECTO

Aunque este proyecto se trata más de un trabajo de investigación que de un proyecto ingenieril con aplicación directa, su realización no ha estado exenta de un coste. En este apartado, se realizará un análisis de los costes asociados a las herramientas utilizadas. Entre las herramientas utilizadas podemos destacar:

- Software informático de Matlab.
- Software informático de Fortran.
- Utilización de un equipo informático de última generación que permita realizar los complejos cálculos que se requieren para la resolución del problema.
- Ingeniero que realice el estudio del problema y las simulaciones.

A continuación se estudiará el coste asociado a estos factores necesarios para la realización del proyecto y se realizará un presupuesto para iniciar el proyecto.

4.1 SOFTWARE INFORMÁTICO

En este apartado se realizará el análisis del coste asociado al Software informático empleado para la realización del problema. En principio, el software informático empleado consta de los programas Matlab y Fortran, los cuáles han sido explicados en epígrafes anteriores (Véase epígrafe 2.8). Se obviará cualquier coste asociado al sistema operativo, así como de las diferentes versiones de la licencia de ambos programas. Los datos económicos recogidos han sido tomados considerando las versiones más modernas.

En la siguiente tabla se mostrará el coste asociado a la utilización de ambos programas:

Producto	Precio(€)
Licencia de Matlab	2000
Licencia de Fortran	635
Total	2635

Se ha considerado un periodo de trabajo cercano a los seis meses, por lo que ambas licencias no han de ser renovadas durante la realización del proyecto. Por ello, no se quedarían obsoletas y no incurrirían en un coste mayor al presupuestado en este proyecto.

4.2 HARDWARE INFORMÁTICO

A continuación se analizará el coste asociado al Hardware necesario para realizar todos los cálculos necesarios sobre el estudio de la evolución de la burbuja. Al tratarse de un problema complejo, la necesidad de ahorrar tiempo en los cálculos realizados, así como la necesidad de realizar un amplio rango de operaciones (integraciones, derivaciones, etc.), necesita de la utilización de un equipo de trabajo sofisticado. En este caso, se necesitará de un ordenador, cuya capacidad de cálculo sea alta, por lo que nos compromete a comprar un ordenador de vanguardia.

Al igual que en el apartado anterior, se analizará el coste asociado a este elemento:

Producto	Precio(€)
PC de sobremesa HP I7	879
Monitor Asus 16:9	258
Total	1137

4.3 COSTE PERSONAL

Para el cálculo del coste de personal empleado, se debe describir las personas que han participado en el proyecto. El coste asociado a cada persona participe del proyecto ha sido estimado según el coste del precio/hora de cada profesión. Concretamente, en la realización del proyecto han participado un becario, que ha sido el encargado de la resolución numérica del proyecto, así como de dos profesoras que han resuelto todas las dudas que el alumno ha tenido referente al proyecto.

En la siguiente tabla se hará un análisis del coste asociado a los costes humanos necesarios para la correcta ejecución del proyecto:

Profesión	Euros/hora	Horas dedicadas	Coste personal(€)
Becario-Grado en Tecn. Industriales	12	300	3600
Profesora PHD	20	30	600
Profesora PHD	20	15	300
Total			4500

4.4 COSTE TOTAL DEL PROYECTO

Finalmente se mostrará el coste asociado a la realización de la totalidad del proyecto, teniendo en cuenta todos los parámetros anteriormente anunciados:

Descripción	Coste(€)
Software	2635
Hardware	1137
Personal	4500
Total	8272

El presupuesto inicial que se necesita para la ejecución del proyecto asciende a un coste de 8272€.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este capítulo se van a exponer las conclusiones personales sobre el desarrollo del Trabajo de Fin de Grado. Asimismo se expondrán unas líneas futuras a seguir en el caso de continuar el proyecto en un futuro.

Durante la realización del Trabajo de Fin de Grado, se han tenido una serie de consideraciones con respecto al comportamiento de la burbuja, de forma que se pudiera resolver el problema de una forma sencilla. Sin embargo, el modelo utilizado para la resolución del problema se trata de un modelo no realista debido a dichas consideraciones. A continuación, se enumerarán varias de ellas:

- La burbuja no es completamente esférica y simétrica, tal y como se definió en la resolución de la teoría. En sangre, las burbujas se adhieren al contorno y rompen dicha simetría. En conclusión, al aplicar una onda acústica a la burbuja, ésta oscila, pero no por ello mantiene la forma original debido a la tensión superficial, sino que puede cambiar a una forma no simétrica.
- Se supone una burbuja estable durante todo el estudio, lo cual no es totalmente cierto, ya que puede colapsar.
- No se ha estudiado el efecto de la capa de lípidos que se forma en el contorno exterior de la burbuja durante el desarrollo de las ecuaciones, lo cual, como se ha explicado en el epígrafe referente a las aplicaciones de esta tecnología, cobra una vital importancia en el ámbito clínico.
- Se ha estudiado una burbuja monodispersa afectada por un campo acústico. En la realidad, las microburbujas no aparecen de forma aislada, sino que su movimiento ha de estudiarse en el conjunto de microburbujas, formando una población. Sin embargo, por simplicidad en los cálculos, se cálculo una sola burbuja.

Todas estas consideraciones se han obviado durante la resolución del problema para simplificar los resultados obtenidos y mostrar al lector una sencilla comprensión del comportamiento y aplicaciones de esta ciencia. En trabajos futuros se analizaría con mayor rigurosidad una población de burbujas y su comportamiento, así como analizar el efecto de la capa de lípidos en la burbuja, de forma que se pueda profundizar, en mayor medida, en la investigación biomédica.

Finalmente, podemos realizar una recopilación de todos los pasos que se han realizado durante el TFG:

En los primeros capítulos, se estudiaron las leyes que rigen el movimiento de una microburbuja, de forma que el lector pudiera entender físicamente el caso que se desarrollaría en el Trabajo Fin de Grado. Se trataba de un caso genérico en el cual se desarrollaban las ecuaciones de Navier-Stokes para poder llegar a una expresión del problema.

En la formulación del problema, se desarrollaron las soluciones de Keller-Miksis y su solución lineal, así como de otros estudiosos de la materia. Asimismo se determinó el concepto de *chirp*, y se explicó por qué lo usamos para excitar la burbuja.

A continuación se simuló el problema mediante Matlab y Fortran. Los resultados obtenidos demuestran que:

- A bajas presiones de insonación y con burbujas de tamaño pequeño, las ecuaciones de Keller-Miksis y su expresión linealizada se aproximaban entre sí; no siendo cierto a mayores amplitudes de la onda acústica y a mayores tamaños de la burbuja.
- Asimismo se calculó el espectro formado por la onda acústica mediante una transformada de Fourier discreta, verificando que los picos en la amplitud de la señal coincidían con la frecuencia de resonancia de la burbuja.
- Por último, se analizó la respuesta de la burbuja para distintos valores de presión ambiente. El análisis obtenido demostró que la amplitud en las oscilaciones de la burbuja, tanto en tiempo como en frecuencia, eran menores a medida que aumentábamos la presión ambiente.

Posteriormente se ha realizado un análisis del estado actual que presenta esta tecnología en el mundo de la industria, concretamente en la industria biomédica, donde su inmediata aplicación en las ecografías ha tenido gran relevancia para el desarrollo del estudio de las microburbujas como un método para mejorar el mundo industrial en un futuro no muy lejano.

Finalmente se realizó un análisis económico, en el cual se valoraron todas las variables que han afectado al problema. Gracias a este análisis, pudimos realizar un presupuesto inicial del proyecto y valorar su rentabilidad en el caso de que este producto apareciera en el mercado industrial.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Leighton T.G. 1994, *The acoustic bubble*
- [2] Prosperetti A. 1977, *Thermal effects and damping mechanisms in forced radial oscillations of gas bubbles in Liquids*
- [3] Flynn H.G 1962, *Physics of Acoustic Cavitation in Liquids*
- [4] Rayleigh Lord 1917, *On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity*
- [5] Plesset MS. 1949, *The dynamics of cavitation bubbles*
- [6] Sutherland D.A. 2008, *Models of Ultrasound Contrast Agents*
- [7] Keller JB y Miksis M. 1980, *Bubble oscillations of large amplitude*
- [8] Van der Meer S. 2007, *Ultrasound Contrast Agents: Resonances of coated bubbles*
- [9] Apfel R.E. 1982, *Acoustic cavitation: A possible consequence of biomedical uses of ultrasound*
- [10] Unger E. y Matsugana T. 2011, *Gene Delivery with Ultrasound and Microbubbles*
- [11] Taleryarkhan R.P., 2007, *Evidence for Nuclear Emissions During Acoustic Cavitation*
- [12] Weisstein, Eric W., *Runge-Kutta Method*
- [13] Tremblay-Dervau, C. 2011, *Measuring blood pressure using microbubbles and ultrasound*